Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1957)

Heft: 3

Rubrik: Ungelöste Probleme

a) Die vier Schnittpunkte *1, 2, 3, 4* von c^c und k^c (Figur 2) liegen auf einem konzentrischen Kreis f, dessen Radius die lineare Exzentrizität der beiden Kegelschnitte ist[5]). f geht auch durch die Schnittpunkte von c_1 und k_1.

b) Die etwa zum Brennpunkt F gehörenden Leitgeraden l_c, l_k von c^c bzw. k^c schneiden auf der gemeinsamen Hauptachse dieser Kegelschnitte eine Strecke $L_c L_k$ aus, deren Mitte F ist. L_c, L_k sind die Scheitelkrümmungsmitten der Fokalkurven von c^c bzw. k^c. Der Kreis über dieser Strecke wird von den Verbindungsgeraden der Schnittpunkte von c^c und k^c mit deren gemeinsamer Mitte N berührt.

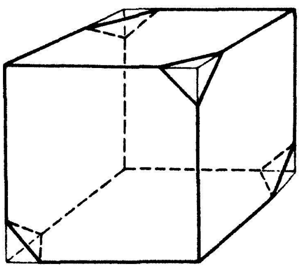
c) Ist g eine solche Verbindungsgerade, so schneidet sie die Hauptscheiteltangenten p, q von c^c und k^c in Punkten P_1 bzw. Q_1, deren Entfernung von den Hauptscheiteln P, Q die Parameterstrecke von k^c bzw. c^c ist. Die Tangenten in den Endpunkten P' und Q' der Parametersehnen von k^c bzw. c^c gehen durch L_k bzw. L_c und schneiden sich auf der Geraden $(1\,2) = (1 \perp PQ)$ im Punkte T, dessen Normalabstand von $z = (PQ)$ gleich ist der Strecke PQ.

d) Die zu c^c und k^c konzentrischen Kreise durch P_1 bzw. Q_1 schneiden die Hauptachse in den Krümmungsmitten der Hauptscheitel von k^c bzw. c^c. Führt man eine analoge Überlegung für die zu k^c konjugierte Hyperbel durch, so erhält man die Nebenscheitelkrümmungsmitten von c^c.

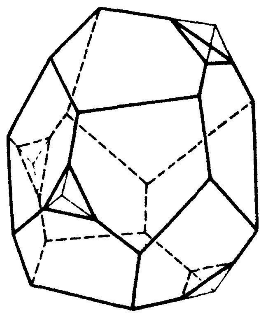
ERNST DOMKOWITSCH, Wien

Ungelöste Probleme

Nr. 17. Die vorliegende Frage soll lediglich auf anschauliche Art formuliert und erörtert werden: Die beiden in Figur 1 und 2 abgebildeten konvexen Polyeder sind, wie zeichnerisch angedeutet, aus einem Würfel und einem Dodekaeder dadurch hervorgegangen, dass je vier passende Ecken abgeschnitten wurden. Die beiden resultierenden Polyeder haben ersichtlich die Eigenschaft, nur Seitenflächen mit



Figur 1



Figur 2

einer durch drei teilbaren Eckenzahl aufzuweisen. Vermutlich gilt allgemein die folgende Aussage:

Ein beliebiges konvexes Polyeder lässt sich durch passendes Abschneiden von Ecken nach endlich vielen Schritten in ein Restpolyeder verwandeln, das lediglich Seitenflächen mit einer durch drei teilbaren Eckenzahl besitzt.

Da die beim Abschneiden einer Polyederecke neu entstehenden Eckpunkte dreikantig sind, kann man sich auf Dreikantspolyeder beschränken, da sich durch passende Schnitte stets zunächst ein solches erzeugen lässt. Die beim weiteren Schneideprozess neu hinzukommenden Seitenflächen sind dann stets dreieckig und genügen also der gestellten Forderung von selbst.

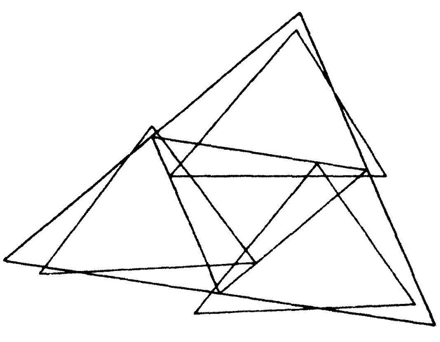
---

[5]) Man ermittelt *1, 2, 3, 4* direkt durch die Proclussche Ellipsenkonstruktion unter Benutzung der mit den Asymptoten a_1, a_2 von k^c zusammenfallenden Scheitelkreisdurchmesser von c^c.

Die Schwierigkeit der scheinbar einfachen und geometrisch anschaulichen Fragestellung darf indessen nicht unterschätzt werden. Es stellt sich nämlich heraus, dass eine Beantwortung im wesentlichen mit der Lösung des Vierfarbenproblems gleichwertig ist! Es handelt sich um eine geometrische Einkleidung der bekannten Gleichwertigkeit der Vierfärbung einer Landkarte durch eine besondere Zweifärbung der Länderecken[1]).

H. HADWIGER

Nachtrag zu Nr. 15. Herr L. DANZER (Freiburg i. Br.) hat gezeigt, dass sechs kongruente Dreiecke in der Ebene so liegen können, dass von je vier Dreiecken stets drei einen nichtleeren Durchschnitt haben, wobei es aber nicht möglich ist, die Dreiecksmenge so in zwei Teilmengen zu zerlegen, dass die ein und derselben Teilmenge angehörenden Dreiecke einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen (vgl. Figur). Damit ist bewiesen, dass, falls ein Satz der erörterten Art für beliebige Eibereiche tatsächlich gelten sollte, die Teilmengenanzahl nicht wie vermutet zwei, sondern wenigstens drei betragen müsste.



Aufgaben

Aufgabe 264. H. TIETZE hat 1947 auf die Aufgabe hingewiesen, die m^n Teil-Einheitswürfel eines n-dimensionalen Würfels der Kantenlänge m so zu numerieren, dass die maximale Nummerndifferenz benachbarter Teilwürfel ihren minimalen Wert M annimmt.

a) Man gebe den genauen Wert von M an, falls unter benachbarten Teilwürfeln solche mit einer gemeinsamen Ecke verstanden werden.

b) Man gebe obere und untere Schranken für M an, wenn als benachbart nur Würfel mit einer gemeinsamen $(n-1)$-dimensionalen Seite angesehen werden.

H. LENZ, München

Lösung: Wenn r eine natürliche Zahl ist, soll I_r die Menge der natürlichen Zahlen $\leqq r$ sein. Wir betrachten die aus n Exemplaren I_m gebildete Produktmenge I_m^n. Sie besitzt m^n Elemente $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wo alle x_i $(1 \leqq x_i \leqq m,\ 1 \leqq i \leqq n)$ ganz sind. Eine eineindeutige Abbildung f von I_m^n auf I_{m^n} soll eine Numerierung von I_m^n heissen. Wir wollen später die spezielle Numerierung

$$f_0(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)\, m^{i-1} \tag{1}$$

benutzen. Wir denken uns weiter eine gewisse symmetrische (und reflexive) Relation zwischen zwei Elementen x und $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ aus I_m^n gegeben, welche durch «x und y sind Nachbarn» ausgedrückt werde. Wenn f eine Numerierung ist, setzt man $M_f = \mathrm{Max}\,(|f(x) - f(y)|)$, wo x, y alle Paare von Nachbarn durchläuft, und weiter $M = \mathrm{Min}\,(M_f)$, wo f alle Numerierungen durchläuft. Wir denken uns weiter, dass die natürliche Zahl s so gewählt ist, dass man für beliebige Paare x, y in höchstens s

[1]) Vgl. hier die ausführliche Darstellung des berühmten Vierfarbenproblems bei H. HASSE, *Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung* (Otto-Salle-Verlag, Frankfurt am Main, Pinneberg 1955), insbesondere die Ausführungen über die äquivalenten Probleme auf Seiten 77 bis 89.