

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 12 (1957)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Eine charakteristische Eigenschaft der Rotationsflächen zweiten Grades  
**Autor:** Trost, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19210>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band XII

Nr. 4

Seiten 73–96

Basel, 10. Juli 1957

## Eine charakteristische Eigenschaft der Rotationsflächen zweiten Grades

Herr W. BLASCHKE hat kürzlich folgenden schönen Satz bewiesen<sup>1)</sup>: Die einzigen Eiflächen, auf denen die Schattengrenzen bei Parallelbeleuchtung eben sind, sind die Ellipsoide. Überlegt man sich einen Beweis dieses Satzes für den Spezialfall rotations-symmetrischer Flächen, so erhält man folgendes Resultat: *Die einzigen Rotationsflächen, auf denen die Schattengrenzen bei Parallelbeleuchtung eben sind, entstehen durch Drehung eines (eigentlichen oder uneigentlichen) Kegelschnitts um eine seiner Achsen.* Dass die Eigenschattengrenze einer solchen Rotationsfläche zweiten Grades eben, also selbst ein Kegelschnitt ist, ist eine bekannte Tatsache, die sogar bei einer im Endlichen liegenden Lichtquelle gilt. Die Umkehrung scheint hingegen weniger bekannt zu sein. Die folgende Darstellung lässt sich aber vielleicht in jedem Fall dadurch rechtfertigen, dass sie ein sinnvolles, im Unterricht verwertbares Beispiel für die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades gibt. Der Formalismus dieser Diskussion wird als bekannt vorausgesetzt<sup>2)</sup>.

Wir benutzen das in der Darstellenden Geometrie gebräuchliche, in der Aufriss-ebene  $\pi_2$  liegende Koordinatensystem  $x, z$ . Die Lichtstrahlen sollen senkrecht von oben, also parallel zur  $z$ -Achse einfallen. Die Gleichung der Rotationsachse sei  $z = p x$ . Die Fälle  $p = 0$  und  $p = \infty$  können als trivial beiseite gelassen werden. Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $p > 0$  annehmen.  $z = f(x)$  sei die Gleichung der Meridiankurve, die als differenzierbar vorausgesetzt wird.

Zwei zu  $\pi_2$  symmetrische, im Aufriss in einen Punkt  $P_2(x_2; z_2)$  zusammenfallende Punkte der Eigenschattengrenze erhält man nach der «Kugelmethode» in folgender Weise:  $P_0(x_0; f(x_0))$  sei ein Punkt der Meridiankurve. Die Kurvennormale in  $P_0$  schneide  $z = p x$  im Punkt  $P_1(x_1; z_1)$ . Dann schneidet die Horizontale  $z = z_1$  das Lot von  $P_0$  auf  $z = p x$  im gesuchten Punkte  $P_2$ . Man erhält

$$x_1 = \frac{x_0 + f(x_0) f'(x_0)}{1 + p f'(x_0)}, \quad z_1 = z_2 = \frac{p(x_0 + f(x_0) f'(x_0))}{1 + p f'(x_0)},$$

<sup>1)</sup> Math. Nachr. 15, 258 (1956).

<sup>2)</sup> Vergleiche etwa L. LOCHER-ERNST, *Differential- und Integralrechnung* (Birkhäuser Verlag, Basel 1948), S. 477–483.

$$x_2 = \frac{x_0 (1 - p^2 + p f'(x_0)) + p f(x_0)}{1 + p f'(x_0)}.$$

Soll die Eigenschaftengrenze eben sein, so müssen die Punkte  $P_2$  auf einer Geraden  $z = q x + k$  liegen. Setzen wir für  $x_0, f(x_0), f'(x_0)$  wieder  $x, z, z'$ , so ergibt sich nach einiger Umformung die Differentialgleichung

$$z' (z - q x - k) = q z + \frac{q - p - p^2 q}{p} x + \frac{k}{p}. \quad (1)$$

Durch die Substitution  $u = z - q x - k, u' = z' - q$  geht (1) über in

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{du^2}{dx} = u u' = \frac{(q - p)(p q + 1)}{p} x + \frac{k(p q + 1)}{p}. \quad (2)$$

Die Integration von (2) liefert

$$(z - q x - k)^2 = \frac{(q - p)(p q + 1)}{p} x^2 + \frac{2 k(p q + 1)}{p} x + K, \quad (3)$$

wo  $K$  eine Integrationskonstante ist. (3) erhält nach Umformung die Form der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$g(x, z) \equiv A x^2 + B x z + C z^2 + D x + E z + F = 0, \quad (4)$$

wobei

$$A = \frac{p - q + p^2 q}{p}, \quad B = -2 q, \quad C = 1, \quad D = -\frac{2 k}{p},$$

$$E = -2 k, \quad F = k^2 - K.$$

Die Diskriminante von (4) hat den Wert

$$\Delta = B^2 - 4 A C = \frac{4 (q - p)(p q + 1)}{p}.$$

Es sei zunächst  $\Delta \neq 0$ . Der Mittelpunkt  $M$  des durch (4) dargestellten Kegelschnitts hat die Koordinaten

$$x_M = \frac{1}{\Delta} (2 C D - B E) = \frac{k}{p - q}, \quad z_M = \frac{1}{\Delta} (2 A E - B D) = \frac{k p}{p - q}.$$

$M$  liegt wegen  $z_M = p x_M = q x_M + k$  sowohl auf der Rotationsachse als auch in der Ebene der Schattengrenze. Für die Richtungen  $m_1, m_2$  der Achsen von (4) erhält man aus

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 m}{1 - m^2} = \frac{B}{A - C} = \frac{2 p}{1 - p^2}$$

die Werte  $m_1 = p$  und  $m_2 = -1/p$ . Damit ist gezeigt, dass die Rotationsachse  $z = p x$  eine Achse des Kegelschnitts ist. Sie sei die  $\xi$ -Achse eines  $(\xi, \zeta)$ -Koordinatensystems mit dem Ursprung in  $M$ . In diesem System hat die Meridiankurve eine Gleichung von der Form

$$U \xi^2 + V \zeta^2 = W. \quad (5)$$

In unserem Fall ist, wenn  $v_B$  das Vorzeichen von  $B$  bedeutet,

$$U = \frac{1}{2} \left( A + C + v_B \sqrt{(A - C)^2 + B^2} \right) = \frac{p - q}{p},$$

$$V = \frac{1}{2} \left( A + C - v_B \sqrt{(A - C)^2 + B^2} \right) = pq + 1,$$

$$W = -g(x_M, z_M) = K - \frac{k^2 \Delta}{4(p - q)^2}.$$

$\Delta < 0$  (*Ellipse*):  $q - p$  und  $pq + 1$  müssen verschiedenes Vorzeichen haben. Da  $q > p > 0$ ,  $pq + 1 < 0$  unmöglich ist, gilt  $q - p < 0$ ,  $pq + 1 > 0$ . Hieraus folgt  $-1/p < q < p$ . Für  $W > 0$  ist die Ellipse reell.

$\Delta > 0$  (*Hyperbel*): In diesem Fall ist entweder  $q > p > 0$  oder  $q < -1/p < 0$ . Ist  $W \neq 0$ , so ist die durch (5) erzeugte Rotationsfläche je nach der Grösse von  $K$  ein einschaliges oder ein zweischaliges Hyperboloid. Ist  $W = 0$ , so liegen zwei reelle Geraden durch  $M$  vor, die einen Rotationskegel erzeugen.

$\Delta = 0$  (*Parabel*): a)  $q = p > 0$ . Bei Drehung des Koordinatensystems um den durch  $\operatorname{tg} \alpha = B/2A = -1/p$  bestimmten spitzen negativen Winkel  $\alpha$  geht (4) über in

$$2k \sqrt{p^2 + 1} \zeta = p(p^2 + 1) \xi^2 + p(k^2 - K). \quad (6)$$

Die Parabelachse fällt also mit der Rotationsachse zusammen. Ist  $k = 0$  und  $K > 0$ , so zerfällt (6) in zwei zur Rotationsachse parallele reelle Geraden, die einen Rotationszylinder erzeugen.

b)  $pq + 1 = 0$ ,  $q = -1/p$ . (4) erhält die Form

$$\left( z + \frac{1}{p} x - k \right)^2 = K.$$

Für  $K \geq 0$  sind das zwei parallele, zur Rotationsachse senkrechte Geraden, die zwei parallele Ebenen erzeugen.

E. TROST, Zürich

## Über Geraden in allgemeiner Lage

Endlich viele Geraden in der euklidischen oder projektiven Ebene, unter denen keine Parallelen vorkommen und von denen keine drei durch einen Punkt gehen, sind *Geraden in allgemeiner Lage*. Wir sagen auch, sie bilden eine *einfache Konfiguration*. In diesem Aufsatz soll über die wenigen bekannten Eigenschaften solcher einfacher Konfigurationen und der durch diese hervorgerufenen Teilungen der Ebene in Gebiete (Zellen) berichtet werden.

Bereits im Jahre 1826 zeigte J. STEINER<sup>1)</sup>, dass  $m$  Geraden in allgemeiner Lage die euklidische Ebene in  $\binom{m+1}{2} + 1$  Zellen zerlegen, von denen  $2m$  unbeschränkt sind. Dies ergibt sich leicht durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Geraden. Wir nehmen die Aussage für eine einfache Konfiguration  $\mathfrak{R}$  mit  $m$  Geraden bereits

<sup>1)</sup> J. STEINER, *Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes*, Crelles J. reine angew. Math. 1, 349–364 (1826), oder Gesammelte Werke I, S. 77–94 (Berlin 1881).