milieu du côté AB. La tangente en D coupe le côté AC au tiers de AC. La deuxième tangente issue de ce point est parallèle à la tangente en E (figure 2). On a ainsi trois parallélogrammes circonscrits à la conique c et dont les côtés sont parallèles aux différentes droites joignant les sommets du triangle aux tiers des côtés opposés. Le pôle de DE étant au milieu de AB, la conique coupe les médianes en des points dont les tangentes sont parallèles aux côtés opposés correspondants. La conique $c(AB)$ tangente en A et B aux droites AC et AB et passant par J passe aussi par F; elle passe encore par M, intersection des médianes, et y a une tangente parallèle à AB. Les coniques $c(BC)$ et $c(CA)$ ont des propriétés analogues (figure 3). Ces trois coniques sont congruentes à la conique $c(ABC)$. J.-P. SYDLER, Zurich

Ungelöste Probleme

Nr. 18. Herr H. LENZ (München) macht uns auf die folgende ungeklärte Frage aufmerksam: Es sei $k \geqq 2$, A ein k-dimensionaler Eikörper von positivem Volumen $V(A) > 0$, $n \geqq k+1$ eine vorgegebene natürliche Zahl und P_n ein in A enthaltenes Eipolyeder mit höchstens n Eckpunkten. Für festes A und n sei

$$p_n = p_n(A) = \sup \frac{V(P_n)}{V(A)} \qquad [P_n \subset A]$$

gesetzt. Die affininvariante Masszahl p_n bezeichnet also das Volumverhältnis, das sich bei einem dem Eikörper A eingelagerten zulässigen Eipolyeder P_n grösstmöglichen Volumens einstellt.

Wie A. M. MACBEATH[1]) mit Hilfe der von W. BLASCHKE[2]) und W. GROSS[3]) erfolgreich auf Sonderfälle angewandten Methode gezeigt hat, gilt

$$p_n(A) \geqq p_n(E),$$

wobei E ein Ellipsoid bezeichnet. Die Ellipsoide haben demnach die extremale Eigenschaft, sich für die volummässige Approximation durch einbeschriebene Polyeder beschränkter Eckenzahl am schlechtesten zu eignen. Unbewiesen ist bis heute die Vermutung geblieben, dass die Ellipsoide die einzigen Eikörper mit dieser Eigenschaft sind, so dass für jedes Nichtellipsoid A

$$p_n(A) > p_n(E) \qquad [A \neq E]$$

gilt. In speziellen Fällen trifft dies in der Tat zu. Dies hat für $n = k+1$ bereits W. GROSS[3]) gezeigt. Für $k = 2$ und $n \geqq 3$ wurde das nämliche von L. FEJES TÓTH[4]) mit Hilfe Fourierscher Reihen nachgewiesen.

---

[1]) A. M. MACBEATH, *An Extremal Property of the Hypersphere*, Proc. Camb. philos. Soc. *47*, 245–247 (1951).

[2]) W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, II (Springer, Berlin 1923).

[3]) W. GROSS, *Über affine Geometrie*, XIII: *Eine Minimumseigenschaft der Ellipse und des Ellipsoids*, Leipziger Ber. *70*, 38–54 (1918).

[4]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953).

Nach L. FEJES TÓTH[4]) kennt man über das extremale Verhältnis beim Ellipsoid im Falle $k = 3$ die Schätzung

$$p_n(E) \leqq \frac{n-2}{8\pi}(3 - \operatorname{ctg}^2 \omega_n) \operatorname{ctg} \omega_n \qquad \left[\omega_n = \frac{n\pi}{6n-12}\right],$$

wobei Gleichheit für $n = 4$, $n = 6$ und $n = 12$ besteht. Die dem Ellipsoid einbeschriebenen Eipolyeder grössten Volumens sind affin zu den drei entsprechenden regulären Dreieckspolyedern. H. HADWIGER

Aufgaben

Aufgabe 268. Consider the elements $1, 2, \ldots, n$ and let be given an integer k with $3 \leqq k \leqq n$. To be determined is the minimal system A of (i, j)-ambos $(1 \leqq i < j \leqq n)$ with the property that each combination

$$\mu_k \equiv (i_1, i_2, \ldots, i_k), \quad 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n$$

contains at least one ambo from A. PAUL TURAN, Budapest

Solution by the proposer: The required minimal system consists exactly of those ambos $(i\, j)$ with $i \equiv j \bmod (k-1)$ (*).

Proof: Let E be a system of ambos with the property that each μ_k-combination contains at least one ambo of E and $\bar{E}$ the complementary set of ambos. Hence the graph corresponding to $\bar{E}$ does not contain a complete subgraph of order k. If A is the *minimal* E-system, so is $\bar{A}$ the *maximal* system of ambos without a complete subgraph of order k. But according to my theorem in Colloquium Math. *3*, 19–30 (1954) $\bar{A}$ is identical with the complementary graph of (*), i.e., $\bar{A}$ is identical with the graph (*), which was to be proved.

Aufgabe 269. Let $\sigma(n)$ denote, as usual, the sum of the divisors of n. Prove that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(n!+1)}{n!+1} = 1.$$

LEO MOSER, Edmonton (Kanada) and J. LAMBEK, Montreal

Lösung (nach Angaben des Aufgabenstellers): Es sei

$$N = n! + 1 = \prod_{p|N} p^e$$

die Primzahlzerlegung von N. Mittels der leicht verifizierbaren Ungleichung

$$p^{-2} + p^{-3} + \cdots + p^{-e} < p^{-1}$$

ergibt sich

$$\frac{\sigma(N)}{N} = \prod_{p|N}(1 + p^{-1} + p^{-2} + \cdots + p^{-e}) < \prod_{p|N}(1 + 2p^{-1}).$$

Es genügt also zu zeigen, dass das rechts stehende Produkt für $n \to \infty$ gegen 1 strebt. Wegen $\log(1 + 2p^{-1}) < 2p^{-1}$ ist

$$\log \prod_{p|N}(1 + 2p^{-1}) = \sum_{p|N} \log(1 + 2p^{-1}) < 2 \sum_{p|N} p^{-1}.$$

Wir müssen jetzt also nur noch zeigen, dass $\sum p^{-1}$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, dass der kleinste Primfaktor von N grösser als