

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **12 (1957)**

Heft 5

PDF erstellt am: **22.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

## Kleine Mitteilungen

### Formules sur les valeurs absolues des nombres réels

*Notations.*  $E \equiv \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  l'ensemble des nombres réels indiqués.

Si  $a_1 > a_2 > \dots > a_s$ , alors

$$\left. \begin{aligned} \max_p E &\equiv a_{p+1} \\ \min_p E &\equiv a_{s-p} \end{aligned} \right\} p = 0, 1, 2, \dots, s-1,$$

avec  $\max_0 E \equiv \max E$  et  $\min_0 E \equiv \min E$ .

1. Nous avons démontré les formules suivantes:

$$\sum_{1 \leq n < m \leq 2k} |a_n - a_m| \equiv \sum_{i=1}^k (2i-1) (\max_{k-i} E - \min_{k-i} E), \quad (1)$$

$$\sum_{1 \leq n < m \leq 2k+1} |a_n - a_m| \equiv \sum_{i=1}^k 2i (\max_{k-i} E - \min_{k-i} E). \quad (2)$$

Comme point de départ dans l'établissement des formules (1) et (2) nous avons pris la formule connue

$$|a_n - a_m| \equiv \max(a_n, a_m) - \min(a_n, a_m).$$

Les formules (1) et (2) peuvent être démontrées par l'induction complète, mais nous omettons la démonstration.

2. Les identités indiquées (1) et (2) restent également valables si parmi les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_s$  il y en a de tels qui sont égaux entre eux.

Dans ce cas

$$\max_p E = a_{p+1} = a_q,$$

lorsque

$$a_1 = a_2 = \dots = a_q > a_{q+1} \dots > a_s \quad (p < q).$$

3. Voici quelques formules particulières:

$$|a_1 - a_2| \equiv \max(a_1, a_2) - \min(a_1, a_2);$$

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| \\ + |a_2 - a_3| \equiv 2 \{ \max(a_1, a_2, a_3) - \min(a_1, a_2, a_3) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| \\ + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| \\ + |a_3 - a_4| \equiv 3 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4) \} \\ + \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| \\ + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5| \\ + |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5| \\ + |a_4 - a_5| \\ \equiv 4 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \} \\ + 2 \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| + |a_1 - a_6| \\
& \quad + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5| + |a_2 - a_6| \\
& \quad \quad + |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5| + |a_3 - a_6| \\
& \quad \quad \quad + |a_4 - a_5| + |a_4 - a_6| \\
& \quad \quad \quad \quad + |a_5 - a_6| \\
& \equiv 5 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \} \\
& + 3 \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \} \\
& + \{ \max_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) - \min_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \}; \\
& |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| + |a_1 - a_6| + |a_1 - a_7| \\
& \quad + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5| + |a_2 - a_6| + |a_2 - a_7| \\
& \quad \quad + |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5| + |a_3 - a_6| + |a_3 - a_7| \\
& \quad \quad \quad + |a_4 - a_5| + |a_4 - a_6| + |a_4 - a_7| \\
& \quad \quad \quad \quad + |a_5 - a_6| + |a_5 - a_7| \\
& \quad \quad \quad \quad \quad + |a_6 - a_7| \\
& \equiv 6 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \} \\
& + 4 \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \} \\
& + 2 \{ \max_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) - \min_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \}.
\end{aligned}$$

$\max_p(a_1, a_2, \dots, a_s)$  signifie le plus grand des nombres  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$ , où l'on a omis au préalable les  $p$  ( $p < s$ ) des plus grands parmi les nombres en question.

$\min_p(a_1, a_2, \dots, a_s)$  signifie le plus petit des nombres  $a_1, a_2, \dots, a_s$ , où l'on a omis, préalablement, les  $p$  ( $p < s$ ) des plus petits parmi ces nombres.

4. Cette note se rattache à la note suivante:

D. S. MITRINOVITCH, *Sur quelques identités élémentaires*, Rev. Math. élément. 10, 65-66 (1955)<sup>1</sup>.  
D. S. MITRINOVITCH, Belgrade

## Aufgaben

**Aufgabe 272.** Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de  $n$  nombres naturels, où  $n > 2$ , soit égal au produit du plus grand commun diviseur de ces nombres par leur plus petit commun multiple. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

*Lösung:* Sind  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$  die Exponenten der Primzahl  $p$  in der Zerlegung der natürlichen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , dann ist  $\alpha_1$  der Exponent von  $p$  im grössten gemeinsamen Teiler  $T$  und  $\alpha_n$  der Exponent von  $p$  im kleinsten gemeinsamen Vielfachen  $V$ . Das Produkt der  $a_i$  ist dann und nur dann gleich  $TV$ , wenn für jede Primzahl  $p$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_n$$

gilt. Da die  $\alpha_i$  nichtnegativ sind, folgt daraus  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ . Wegen  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  ist auch  $\alpha_1 = 0$ , das heisst,  $p$  kann nur in einem einzigen  $a_i$  aufgehen. Die  $a_i$  sind also paarweise teilerfremd.

Lösungen sandten A. ADAM (Debrecen), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest).

**Aufgabe 273.** Gegeben sind vier Kugeln  $K_1, K_2, K_3, K_4$  und ein Punkt  $P$ . Gesucht werden zwei sich in  $P$  berührende Kugeln, von denen die eine  $K_1$  und  $K_3$ , die andere  $K_2$  und  $K_4$  berührt. C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

<sup>1</sup>) Voir aussi: D. S. MITRINOVITCH, *Sur certaines relations restant valables si l'on permute les opérateurs y intervenant*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 8, 15-22 (1956).