Aufgaben

$$
\begin{aligned}
&|a_1-a_2|+|a_1-a_3|+|a_1-a_4|+|a_1-a_5|+|a_1-a_6|\\
&\qquad+|a_2-a_3|+|a_2-a_4|+|a_2-a_5|+|a_2-a_6|\\
&\qquad\qquad+|a_3-a_4|+|a_3-a_5|+|a_3-a_6|\\
&\qquad\qquad\qquad+|a_4-a_5|+|a_4-a_6|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+|a_5-a_6|\\
&\equiv 5\{\max(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)-\min(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\}\\
&+3\{\max\nolimits_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)-\min\nolimits_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\}\\
&+\ \{\max\nolimits_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)-\min\nolimits_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|a_1-a_2|+|a_1-a_3|+|a_1-a_4|+|a_1-a_5|+|a_1-a_6|+|a_1-a_7|\\
&\qquad+|a_2-a_3|+|a_2-a_4|+|a_2-a_5|+|a_2-a_6|+|a_2-a_7|\\
&\qquad\qquad+|a_3-a_4|+|a_3-a_5|+|a_3-a_6|+|a_3-a_7|\\
&\qquad\qquad\qquad+|a_4-a_5|+|a_4-a_6|+|a_4-a_7|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+|a_5-a_6|+|a_5-a_7|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+|a_6-a_7|\\
&\equiv 6\{\max(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)-\min(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)\}\\
&+4\{\max\nolimits_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)-\min\nolimits_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)\}\\
&+2\{\max\nolimits_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)-\min\nolimits_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)\}.
\end{aligned}
$$

$\max_p(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ signifie le plus grand des nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$, où l'on a omis au préalable les p $(p < s)$ des plus grands parmi les nombres en question.

$\min_p(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ signifie le plus petit des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_s$, où l'on a omis, préalablement, les p $(p < s)$ des plus petits parmi ces nombres.

4. Cette note se rattache à la note suivante:
D. S. Mitrinovitch, *Sur quelques identités élémentaires*, Rev. Math. élément. *10*, 65–66 (1955)[1].

D. S. Mitrinovitch, Belgrade

Aufgaben

Aufgabe 272. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de n nombres naturels, où $n > 2$, soit égal au produit du plus grand commun diviseur de ces nombres par leur plus petit commun multiple.

W. Sierpiński, Varsovie

Lösung: Sind $0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ die Exponenten der Primzahl p in der Zerlegung der natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dann ist α_1 der Exponent von p im grössten gemeinsamen Teiler T und α_n der Exponent von p im kleinsten gemeinsamen Vielfachen V. Das Produkt der a_i ist dann und nur dann gleich TV, wenn für jede Primzahl p

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_n$$

gilt. Da die α_i nichtnegativ sind, folgt daraus $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Wegen $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ ist auch $\alpha_1 = 0$, das heisst, p kann nur in einem einzigen a_i aufgehen. Die a_i sind also paarweise teilerfremd.

Lösungen sandten A. Adam (Debrecen), R. Lauffer (Graz), J. Schopp (Budapest).

Aufgabe 273. Gegeben sind vier Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 und ein Punkt P. Gesucht werden zwei sich in P berührende Kugeln, von denen die eine K_1 und K_2, die andere K_3 und K_4 berührt.

C. Bindschedler, Küsnacht

[1] Voir aussi: D. S. Mitrinovitch, *Sur certaines relations restant valables si l'on permute les opérateurs y intervenant*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie *8*, 15–22 (1956).

Solution: Soient Q une sphère tangente au premier couple et R une sphère tangente au deuxième couple et telles qu'elles soient elles-mêmes tangentes au point P. Supposons le problème résolu et appliquons à l'ensemble une inversion spatiale de pôle P: Les quatre sphères données donnent quatre nouvelles sphères K_1', K_2', K_3' et K_4', les deux sphères cherchées donnent deux plans parallèles Q' et R' tangents respectivement à K_1', K_2' et à K_3', K_4'.

Le problème revient maintenant à mener deux plans parallèles Q' et R' tangents respectivement aux sphères K_1', K_2' et aux sphères K_3', K_4'. A cet effet on circonscrit à chaque couple de sphères un cône de révolution et on mène des plans parallèles Q' et R' tangents à ces cônes. Pour ce faire, on amène, par une translation, le sommet de l'un des cônes à coïncider avec le sommet de l'autre. Les quatre plans tangents communes qu'on peut mener à ces deux cônes ayant même sommet, donnent quatre plans directeurs pour le couple Q', R'. Puisque l'on peut circonscrire deux cônes à deux sphères et qu'il en résulte quatre combinaisons possibles pour les deux cônes cités plus haut, le problème admettra, dans le cas le plus général, $4 \cdot 4 = 16$ solutions pour le couple de sphères Q et R. GUY NEYEN, Luxembourg

Weitere Lösungen sandten J. BASILE (Brüssel), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest), A. SCHWARZ (Seuzach).

Aufgabe 274. Démontrer

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^3)\sqrt[4]{x}}\,dx = -\frac{\pi^2}{9}\sqrt{2}.$$

H. BREMEKAMP, Delft

Lösung: Durch die Substitution $x = y^{4/3}$ geht die Behauptung über in

$$Y = \int_0^\infty f(y)\,dy = -\frac{\pi^2}{16}\sqrt{2}, \qquad f(y) = \frac{\ln y}{1+y^4}.$$

a) Zunächst findet man durch Anwendung des funktionentheoretischen Residuensatzes oder durch Ausrechnung mittels Partialbruchzerlegung

$$Y_1 = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}.$$

b) Man integriert $f(y)$ über den geschlossenen Weg W der komplexen y-Ebene, der sich aus den folgenden 4 Teilbögen zusammensetzt: 1. Längs der reellen Achse von $r > 0$ bis zu $R > r$; 2. auf dem Viertelkreis vom Radius R von der reellen Achse zur imaginären Achse; 3. auf der imaginären Achse von $i\,R$ bis zu $i\,r$; 4. auf dem Viertelkreis vom Radius r von der imaginären Achse zurück zur reellen Achse.

$f(y)$ hat im Innern von W im Punkt

$$\varepsilon = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad (\varepsilon^2 = i)$$

einen einfachen Pol. Das Integral von $f(y)$ längs W ist daher gleich $2\pi i A$, wo A das Residuum von $f(y)$ in ε bedeutet. Es ist

$$A = \frac{\ln\varepsilon}{4\,\varepsilon^3}, \qquad 2\pi i A = \frac{\pi^2}{16}\sqrt{2}\,(1+i).$$

Die beiden Integrale von $f(y)$ über die Viertelkreise streben gegen 0, wenn man $r \to 0$ bzw. $R \to \infty$ gehen lässt. Daher wird

$$Y - \int_{y=0}^\infty \frac{\ln(i\,y)}{1+y^4}\,d(iy) = (1+i)\,\frac{\pi^2}{16}\sqrt{2}.$$

Nun ist das zweite Integral links gleich

$$i\{\ln i \cdot Y_1 + Y\} = i\,Y - \frac{\pi^2}{8}\sqrt{2}$$

und daher

$$(1-i)\,Y = -(1-i)\,\frac{\pi^2}{16}\sqrt{2},$$

was zu beweisen war. K. Voss, Freiburg i. Br.

Ž. Pantić (Beograd) benutzt die Eulersche Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} \qquad (n > m > 0).$$

Differenziert man nach m und setzt nachher $m = 3/4$, $n = 3$, so ergibt sich das Integral der Aufgabe. Der Aufgabensteller führt diese Eulersche Formel durch die Substitution $x^n = y$ auf die Beta- bzw. Gammafunktion zurück. Weitere Lösungen mittels des Residuensatzes sandten L. Kieffer (Luxemburg) und R. Rose (Saarbrücken).

Aufgabe 275. Man kann aus einer Kreisscheibe nichtabzählbar viele Radien entfernen (unter Belassen der Scheibenmitte) und dann einen Teil des Restes der Scheibe einer einzigen Drehung unterziehen, um die Scheibe wieder voll zu haben.

L. Locher-Ernst

Lösung: Wir gehen von einem beliebigen Kreisradius r (ohne Kreiszentrum) aus und betrachten die Menge $A(r)$ aller Radien, die von r aus durch Drehungen um ganzzahlige Vielfache eines festen Winkels φ im positiven und negativen Sinn erreicht werden. Ist λ eine irrationale Zahl zwischen 0 und 1 und wählen wir $\varphi = \lambda \cdot 360°$, so besteht diese Menge $A(r)$ aus abzählbar unendlich vielen Radien, von denen keine zwei zusammenfallen. Wir bezeichnen diese Radien sinngemäss mit

$$r;\ r\varphi,\ r\varphi^2,\ r\varphi^3,\ \ldots,\ r\varphi^{-1},\ r\varphi^{-2},\ r\varphi^{-3},\ \ldots.$$

Die Kreisscheibe (ohne Zentrum) lässt sich als die Vereinigungsmenge von nichtabzählbar vielen solcher Radiusmengen $A(r)$ auffassen, die untereinander alle punktfremd sind. Aus jeder dieser Mengen lässt sich nach dem Auswahlaxiom genau ein Radius r herausgreifen. Wir bilden nun folgende 3 Mengen:

M bestehe aus allen diesen ausgewählten Radien r und den entsprechenden Radien $r\varphi^{-1}$, $r\varphi^{-2}$, $r\varphi^{-3}$, ...,

N aus allen zugehörigen Radien $r\varphi$, und

R aus allen übrigen Radien, das heisst aus allen $r\varphi^2$, $r\varphi^3$, ...

Es gilt $M\varphi = M + N$. Entfernen wir also die nichtabzählbare Radiusmenge N aus der Kreisscheibe, so brauchen wir nur die Teilmenge M des Scheibenrestes um $+\varphi$ zu drehen, um die Scheibe wieder voll zu haben. J. Binz, Bern

Weitere Lösungen sandten H. Kummer, Langenthal, W. Nef, Bern, und M. Sekanina, Brno.

Neue Aufgaben

305. A convex (irregular) polygon P with n sides is subdivided into convex polygons by d diagonals which do not intersect in the interior of P. Let S_n denote the number of all such subdivisions, $d = 0, 1, 2, \ldots, n-3$. Here is a short table:

$$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,$$

$$S_n = 1,\ 3,\ 11,\ 45,\ 197,\ 903.$$

Show (1) and (2):

$$S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k+1} \binom{n-3}{k} 2^{n-3-k}, \tag{1}$$

$$S_n \equiv 1 \pmod{n} \quad (n = \text{prime}) . \tag{2}$$

The problem is not new, but the form (1) of the solution seems to be new.

G. PÓLYA, Stanford University, USA

306. Die Kanten eines Simplexes (S_n) des $(n-1)$-dimensionalen Raumes (R_{n-1}) werden in je $m = 2k+1$ gleiche Teile geteilt. Die $n-2$ Punkte des S_n, die nicht zu der betreffenden Kante gehören, bestimmen mit jedem Teilpunkte je einen S_{n-1} bzw. einen R_{n-2}. Die Teilpunkte einer jeden Kante bestimmen $m-1$ verschiedene R_{n-2}, die wir der betreffenden Kante zuordnen. $\binom{n}{2}$ je verschiedenen Kanten zugeordnete $(n-2)$-dimensionale Räume haben im allgemeinen keinen gemeinsamen Punkt.

a) Bestimme den kleinsten Wert von m so, dass wenigstens ein Knotenpunkt – das heisst ein gemeinsamer Punkt von $\binom{n}{2}$ je verschiedenen Kanten zugeordneter R_{n-2} – entsteht.

b) Bestimme die Anzahl der Knotenpunkte beim kleinstmöglichen Wert von m.

J. SCHOPP, Budapest

307. a) Man zeige, dass die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten in den ersten 2^n Zeilen des Pascalschen Dreiecks 3^n ist.

b) Gibt es eine natürliche Zahl m so, dass in den ersten m Zeilen des Pascalschen Dreiecks gleichviel gerade und ungerade Binomialkoeffizienten stehen?

F. LEUENBERGER, Zuoz

308. Es bedeute $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Man beweise, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{1, 2, \ldots, n\}}$$

irrational ist.

P. ERDÖS

309. In der Ebene eines Dreieckes D vom Flächeninhalt 1 werden alle Geraden gezeichnet, die von D ein Flächenstück vom konstanten Inhalt λ $(0 \leq \lambda \leq 4/9)$ abschneiden. Man bestimme den Flächeninhalt des von den Geraden nicht überdeckten Teiles von D.

E. TROST, Zürich

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Gegeben sind die Punkte $A(0; 0)$ und $B(u; v)$. Welches ist der geometrische Ort des Punktes $P(x; y)$ mit der Eigenschaft, dass ein Lichtstrahl AP an der Horizontalen durch P in den Strahl PB reflektiert wird?
$\left[\left(x - \frac{u}{2}\right)\left(y - \frac{v}{2}\right) = \frac{uv}{4}\right]$.

2. a) Die Normale im Punkte P einer gleichseitigen Hyperbel schneidet deren Achsen in X und Y, so dass $XP = PY$ ist.

b) In irgendeinem Punkte P der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ zieht man die Kurvennormale und die Normale zum Radiusvektor OP. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen liegen auf einem Kreis.

3. In der gleichseitigen Hyperbel sind zwei senkrecht aufeinanderstehende Sehnen durch einen Brennpunkt gleich lang.

4. U_1U_2 und V_1V_2 sind zwei beliebige reelle Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel. Die beiden Sehnen U_1V_1 und U_2V_2 werden von einem beliebigen Punkt P der Kurve aus unter gleichen oder supplementären Winkeln gesehen.

5. Der folgende einfache Beweis dafür, dass die gleichseitige Hyperbel ein Kegelschnitt ist, dürfte nicht allgemein bekannt sein: In einem räumlichen $(x; y; z)$-System laute die Gleichung der Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$, $z = 0$. Den Punkt S $(0; 0; a)$ verbinde man mit einem beliebigen Punkt $P(x; y; 0)$ der Kurve und mit $Q(x; 0; a)$. Nun ist

$$\overline{SP}^2 = x^2 + y^2 + a^2 = 2\,x^2 = 2\,\overline{SQ}^2\,,$$

woraus $\sphericalangle QSP = 45°$ folgt. Die Hyperbel liegt also auf einem Drehkegel mit dem Öffnungswinkel 90°, der Spitze S und der Achse $y = 0$, $z = a$.

Journées de la CIEM

Bruxelles, 1.–3. Juli 1957

Aus Anlass einer Sitzung des Exekutivkomitees der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (CIEM/IMUK) organisierte die nationale belgische Subkommission unter der initiativen Leitung ihres Präsidenten P. Burniat und ihres Sekretärs W. Servais eine Informationstagung für die belgischen Mathematiklehrer, an der über die in der gegenwärtigen Arbeitsperiode der CIEM zur Diskussion stehenden Gebiete berichtet wurde. Aus dem Ausland waren anwesend Behnke (Deutschland), Bunt (Holland), Buzano (Italien), Dajevic (Jugoslawien), Desforges (Frankreich), Fehr (USA), Freudenthal (Holland), Frostmann (Schweden), Gerretsen (Holland), Gloden (Luxemburg), Karamata (Schweiz), Kurepa (Jugoslawien), Maxwell (England), Pihl (Dänemark), Room (Australien), Trost (Schweiz). Die Vorträge und Diskussionen fanden mit einer Ausnahme im Vortragssaal der Fondation universitaire an der rue d'Egmont statt und waren trotz der grossen Hitze und dem Beginn der Ferien sehr gut besucht. Die ausländischen Delegierten fanden bei gemeinsamen Mahlzeiten, bei Spaziergängen in der Stadt sowie bei dem von Professor Burniat in seinem Landhaus gegebenen Empfang reichlich Gelegenheit zur persönlichen Fühlungnahme und zum Gedankenaustausch, wobei es sich zeigte, dass viele Länder gleichartige Probleme zu lösen haben.

In seinen Begrüssungsworten in der Eröffnungssitzung erwähnte P. Burniat einmal mehr die ernste Situation, die sich aus der «Unterproduktion» von Mathematikern ergibt. Dieses Problem erfordert angesichts der ständig steigenden Bedeutung der Mathematik dringend eine rasche Lösung, da insbesondere der Mangel an qualifizierten Lehrkräften gross ist.

Im ersten Vortrag gab der Präsident der CIEM, H. Behnke (Münster) ein plastisches Bild der Entwicklung des mathematischen Unterrichts in Deutschland vom 18. Jahrhundert an bis in die Neuzeit. Er wies dabei auch auf die Einflüsse hin, die in letzter Zeit einerseits von der angewandten Mathematik und andererseits von der Theorie der Strukturen (Bourbaki) ausgehen.

Am Nachmittag des ersten Tages begab man sich ins Athenee royal d'Etterbeek zur Besichtigung einer Ausstellung mathematischer Schülermodelle. Die Herstellung sol-