Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1957)

Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XII Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 10. November 1957

Ungelöste Probleme

Nr. 20. Wir stellen die Frage: *Mit wievielen translationsgleichen Exemplaren lässt sich ein Eikörper vollständig überdecken, so dass er ganz im Innern der Vereinigungsmenge der nur durch Verschiebung aus ihm hervorgehenden Körper enthalten ist?*

Die genaue Formulierung des Problems lautet wie folgt: Es sei $k \geqq 1$ eine natürliche Zahl, und N_k bezeichne die kleinste natürliche Zahl, für welche die nachfolgende Aussage richtig ist: Ist A ein eigentlicher konvexer Körper des k-dimensionalen euklidischen Raumes, so gibt es n mit A translationsgleiche Körper A_i $(i = 1, \ldots, n)$ mit $n \leqq N_k$ derart, dass jeder Punkt von A ein innerer Punkt der Vereinigungsmenge $U_1^n A_i$ ist, so dass also A in diesem Sinne durch n translationsgleiche Exemplare vollständig überdeckt wird, wobei n höchstens N_k ist.

Die zur gewünschten Überdeckung ausreichende Anzahl n hängt übrigens sehr stark von der Form des individuell gewählten Körpers ab. Hat A beispielsweise eine reguläre Randfläche, so reicht bereits $n = k + 1$ aus. Wie man mit Anwendung eines Schubfachschlusses leicht einsehen kann, gilt bei einem Parallelotop für die kleinste in Betracht fallende Anzahl bereits $n = 2^k$; damit ist gezeigt, dass jedenfalls $N_k \geqq 2^k$ ausfallen muss. Trivialerweise gilt $N_1 = 2$. Ferner ist leicht nachzuweisen, dass $N_2 = 4$ ist; hierbei wird die höchste erforderliche Exemplaranzahl $n = 4$ lediglich beim Parallelogramm benötigt. Wie F. W. LEVI[1]) nachgewiesen hat, reicht bei jedem vom Parallelogramm verschiedenen ebenen Eibereich schon $n = 3$ aus. Die Levische Schlussmethode ist nicht auf höhere Dimensionen übertragbar. Welchen Wert hat N_k für $k \geqq 3$?

H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung

Es sei O ein beliebiger Punkt im Innern eines Dreiecks $A_1A_2A_3$. Bezeichnen wir mit R_i $(i = 1, 2, 3)$ den Abstand $\overline{OA}_i$, mit r_i den Abstand der Seite $A_{i+1}A_{i+2}$ von O, so gilt die Ungleichung

$$R_1R_2R_3 \geqq 8\, r_1r_2r_3. \tag{1}$$

[1]) F. W. LEVI, Arch. Math. *6*, 369–370 (1955). Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns.

Gleichheit besteht nur, wenn O der Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks ist. Einen nicht elementaren Beweis von (1) findet man in dem Werk von L. FEJES-TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag 1953), S. 33. Der folgende Beweis ist ganz elementar.

Bezeichnen wir mit $R_i + z_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die Längen der drei durch O gehenden Ecktransversalen, mit F die Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und mit F_i die Fläche des Dreiecks $OA_{i+1}A_{i+2}$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{R_i}{R_i + z_i} = \sum_{i=1}^{3}\left(1 - \frac{z_i}{R_i + z_i}\right) = 3 - \sum_{i=1}^{3} \frac{F_i}{F} = 2. \tag{2}$$

Wegen $r_i \leqq z_i$ erhält man die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{R_i}{R_i + r_i} \geqq 2. \tag{3}$$

Beseitigt man in (3) die Nenner, so ergibt sich nach leichter Rechnung

$$\frac{R_1R_2R_3}{r_1r_2r_3} \geqq 2 + \frac{R_1}{r_1} + \frac{R_2}{r_2} + \frac{R_3}{r_3}. \tag{4}$$

Nach der bekannten Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel haben wir ferner

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{R_1}{r_1} + \frac{R_2}{r_2} + \frac{R_3}{r_3}\right) \geqq \sqrt[3]{\frac{R_1R_2R_3}{r_1r_2r_3}}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt jetzt

$$A^3 - 3A - 2 = (A+1)^2(A-2) \geqq 0.$$

Somit ist $A \geqq 2$, $3A \geqq 6$ und (1) folgt unmittelbar aus (4).

Mit dieser Methode kann auch eine analoge Aussage für das Tetraeder bewiesen werden. Es bedeute jetzt R_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ den Abstand OA_i, wo O ein beliebiger Punkt im Innern des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ ist, und r_i den Abstand der Seitenfläche $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ von O. Dann gilt die Ungleichung

$$R_1R_2R_3R_4 \geqq 81\, r_1r_2r_3r_4. \tag{1*}$$

Gleichheit tritt ein, wenn O der Mittelpunkt eines regulären Tetraeders ist. Ist V das Volumen des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ und V_i das Volumen des Tetraeders $OA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$, so gilt, wenn wieder $R_i + z_i$ die Längen der durch O gehenden Ecktransversalen sind,

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{R_i}{R_i + z_i} = \sum_{i=1}^{4}\left(1 - \frac{z_i}{R_i + z_i}\right) = 4 - \sum_{i=1}^{4} \frac{V_i}{V} = 3. \tag{2*}$$

Wegen $r_i \leqq z_i$ erhält man

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{R_i}{R_i + r_i} \geqq 3. \tag{3*}$$

Anstelle von (4) ergibt sich jetzt

$$\prod_{i=1}^{4} \frac{R_i}{r_i} \geqq 3 + 2\sum_{i=1}^{4} \frac{R_i}{r_i} + \sum_{i>k} \frac{R_iR_k}{r_ir_k}. \tag{4*}$$

Durch zweimalige Anwendung der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel erhält man

$$\left.\begin{aligned} G &= \prod_{i=1}^{4}\left(\frac{R_i}{r_i}\right)^{1/4} \leqq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\frac{R_i}{r_i}, \\ G^2 &= \prod_{i=1}^{4}\left(\frac{R_i}{r_i}\right)^{1/2} = \prod_{i>k}\frac{R_i R_k}{r_i r_k} \leqq \frac{1}{6}\sum_{i>k}\frac{R_i R_k}{r_i r_k}. \end{aligned}\right\} \qquad (5^*)$$

Aus (4*) und (5*) folgt jetzt

$$G^4 - 6\,G^2 - 8\,G - 3 = (G+1)^3\,(G-3) \geqq 0.$$

Somit ist $G \geqq 3$, woraus (1*) unmittelbar folgt. J. BERKES, Szeged

Betrachtung zur Technik der Zürcher Proportionalwahlen

Es sollen n gleiche und unteilbare Gegenstände in g Gruppen aufgeteilt werden, und zwar ungefähr proportional zu den natürlichen Zahlen s_i, $i = 1, 2, \ldots, g$, deren Summe s sei. Die genau proportionale Verteilung $S_i = n\, s_i/s$ ist im allgemeinen nicht ganzzahlig und daher nicht realisierbar. Eine ganzzahlige Näherung n_i, $i = 1, 2, \ldots, g$, mit der Summe n soll gemäss den Zürcher Proportionalwahlen nach folgenden Regeln bestimmt werden:

1. Bestimmung der Verteilungszahl $v = [s/(n+1)] + 1$.

2. Erste Verteilung: $A_i = s_i/v$, $a_i = [A_i]$. Die Summe der a_i ist höchstens gleich n. Ist sie gleich n, dann ist definitiv $n_i = a_i$. Andernfalls folgt:

3. Bestimmung der Quotienten $Q_i = s_i/(a_i+1)$. Unter ihnen hat mindestens einer maximale Grösse, etwa Q. Haben mehrere diesen Wert, dann wählt man unter ihnen denjenigen mit dem grössten s_i. Versagt auch dieses Kriterium, so entscheidet das Los. Auf jeden Fall wird man so auf einen bestimmten Index k geführt, für den $Q = s_k/(a_k+1)$ ist, und es folgt:

4. Zweite Verteilung:

$$b_i = \begin{cases} a_i & (i \neq k), \\ a_k + 1 & (i = k). \end{cases}$$

Ist nun die Summe der b_i gleich n, dann ist definitiv $n_i = b_i$. Andernfalls folgt

5. Wiederholung von Regel 3 mit den Quotienten $Q_i' = s_i/(b_i+1)$ und entsprechend von Regel 4, und dies so lange, bis die Summe n erreicht ist.

Auf Grund der Regeln 1 bis 5 folgt:

a) Es gibt einen positiven Proportionalitätsfaktor φ so, dass die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$n_i \leqq \varphi\, s_i \leqq n_i + 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, g). \tag{1}$$

b) Die an den genauen Zahlen S_i eventuell bewirkten Abwertungen sind bei allen Gruppen stets kleiner als 1, die eventuellen Aufwertungen dagegen nur kleiner als $g - 1$.

c) Bei nur zwei Gruppen ist die Aufwertung der einen Gruppe gleich der Abwertung der andern, und es wird diejenige Gruppe aufgewertet, für die der Ausdruck $([S_i]+1)\,(S_i - [S_i])$ den grösseren Wert hat. Die grössere Gruppe hat also bessere Aufwertungschancen.

Zum Beweis dienen folgende Überlegungen:

Eine Gruppe von g Zahlen X_i (sie sind im folgenden alle nichtnegativ) werde aufgefasst als Parallelkoordinaten eines Punktes (X_i) in einem g-dimensionalen Raum. Zur Abkürzung werde etwa $(X_i) = \Xi$ gesetzt und $(x_i) = \xi$ usw. Der Nullpunkt heisse ω.

Die Punkte Ξ, welche den Ungleichungen $x_i \leqq X_i \leqq x_i + 1$ genügen, bilden eine Zelle, die durch $\{x_i\}$ symbolisiert sei. Die Ungleichungen (1) bedeuten dann: die Zelle

$\{n_i\}$ enthält mindestens einen Punkt des Strahles $\omega\sigma$. Es ist ein innerer Punkt der Zelle, wenn überall das Ungleichheitszeichen gilt. Die Summe der ganzen Zahlen x_i sei als Rang der Zelle $\{x_i\}$ bezeichnet. Dann gilt:

Wenn ein Strahl $\omega\sigma$ innere Punkte einer Zelle $\{n_i\}$ enthält, dann enthält er keine Punkte irgendeiner andern Zelle desselben Ranges. Daraus folgt: Wenn P ein gemeinsamer Randpunkt zweier Zellen desselben Ranges ist, dann enthält der Strahl ωP keinen inneren Punkt irgendeiner Zelle dieses Ranges.

Beweis: Wenn die Zelle $\{b_i\}$ den gleichen Rang haben soll wie $\{a_i\}$, dann muss mindestens ein b_i, etwa b_1, um mindestens 1 grösser sein als a_1, und mindestens ein anderes etwa b_2, muss um mindestens 1 kleiner sein als a_2. Wäre nun (X_i) ein innerer Punkt von $\{a_i\}$ und zugleich (UX_i) ein innerer oder Randpunkt von $\{b_i\}$, dann müsste sein:

$$a_1 < X_1 < a_1 + 1 \leqq b_1 \leqq UX_1 \leqq b_1 + 1,$$

also $U > 1$, und ebenso

$$b_2 \leqq UX_2 \leqq b_2 + 1 \leqq a_2 < X_2 < a_2 + 1,$$

also $U < 1$, was unmöglich ist.

Nun ist nach Regel 2 (A_i) ein Punkt von $\{a_i\}$, und wegen $v > s/(n+1)$ ist der Rang von $\{a_i\} \leqq n$. Im Fall der Gleichheit ist somit (1) erfüllt mit $\varphi = 1/v$. Im Falle der Ungleichheit sei $(B_i) = (v A_i/Q)$ gesetzt. Zufolge Regel 3 ist dann $B_i \leqq a_i + 1$, wobei das Gleichheitszeichen mindestens für $i = k$ gilt. Ferner ist

$$\frac{v}{Q} = \frac{v}{Q_k} = \frac{v(a_k+1)}{s_k} = \frac{a_k+1}{A_k} > 1$$

und daher $B_i > A_i$, und zwar gleich $a_i + 1$ für $i = k$. Zufolge Regel 4 ist also (B_i) ein Punkt der Zelle $\{b_i\}$, und wenn $n_i = b_i$ ist, ist (1) erfüllt mit $\varphi = 1/Q$. Kommt auch noch Regel 5 ins Spiel, so sei $Q' = s_l/(b_l+1)$ das Maximum der Quotienten Q_i' und die dritte Verteilung $c_i = b_i$ für $i \neq l$ und $c_l = b_l + 1$. Setzt man dann $(C_i) = (v B_i/Q')$, so zeigt eine analoge Überlegung, dass (C_i) ein Punkt von $\{c_i\}$ ist. Ist Q_k nicht der einzige der Quotienten Q_i, welcher das Maximum Q erreicht, so ist $v/Q' = 1$ und $(C_i) = (B_i)$, und dies bleibt beim Weiterfahren so, bis alle gleichen Quotienten aufgebraucht sind, während der Rang der Zellen immer um 1 wächst. Schliesslich erreicht man eine Zelle vom Range n, womit dann (1) mit entsprechendem φ erfüllt ist. Damit ist a) bewiesen.

Die Punkte (A_i), (B_i), (C_i) usw. bis zum letzten, (L_i), liegen alle auf dem Strahl $\omega\sigma$, mit $\sigma = (s_i)$. (L_i) ist ein Punkt der Zelle $\{n_i\}$, und seine Koordinatensumme ist deshalb nicht kleiner als n. (S_i) liegt ebenfalls auf $\omega\sigma$ und hat die Koordinatensumme n. Daher gilt für alle i: $S_i \leqq L_i \leqq n_i + 1$. Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen nur, wenn überhaupt $(S_i) = (L_i) = (n_i)$ ist; denn die s_i sind alle >0. Ist nun zum Beispiel $S_1 > n_1$, dann ist bestimmt $S_1 < L_1$ und daher die Abwertung $S_1 - n_1 < 1$. Ist aber $S_1 < n_1$, so ist ebenfalls $S_i < L_i$ für alle i, weil (n_i) der einzige Zellenpunkt mit der Koordinatensumme n ist. Ferner ist $n_1 - S_1$ gleich der Summe der Differenzen $S_i - n_i$ über alle i, ausgenommen 1. Diese Differenzen sind aber alle kleiner als $L_i - n_i$, und jede der letzteren ist höchstens 1. Daher ist die Aufwertung $n_1 - S_1$ kleiner als $g - 1$. Damit ist auch b) bewiesen.

Wenn schliesslich $g = 2$ ist, dann ist auch die Aufwertung <1 und natürlich gleich der Abwertung der andern Gruppe. Es kommen also nur die beiden Lösungen $\lambda = ([S_1], [S_2] + 1)$ und $\lambda' = ([S_1] + 1, [S_2])$ in Frage. Die zugehörigen Zellen haben einzig den Randpunkt $\varrho = ([S_1] + 1, [S_2] + 1)$ gemein. Der Strahl $\omega\varrho$ enthält keinen andern Punkt dieser Zellen; das folgt aus dem oben bewiesenen allgemeinen Satz oder auch unmittelbar aus der geometrischen Anschauung. $\omega\varrho$ teilt die Strecke $\lambda\lambda'$ im Verhältnis $([S_2]+1):([S_1]+1)$, wie ebenfalls geometrisch leicht ersichtlich. Der Schnittpunkt (S_i) des bestimmenden Strahles $\omega\sigma$ mit der Strecke $\lambda\lambda'$ liegt somit auf dem einen oder andern Abschnitt, je nach dem in c) angegebenen Kriterium.

Das Wesentliche der gefundenen Resultate besteht in folgendem:

1. Die Aufrundungen können 1 und sogar grösser als 1 sein. Das widerspricht dem Grundgedanken, dass alle Rundungen kleiner als 1 bleiben sollten. Theoretisch kann

eine Aufrundung fast den Betrag $g-1$ erreichen, dann nämlich, wenn eine übermächtige Gruppe die Zuteilungen aller andern, denen vielleicht nur eine einzige Stimme fehlt, aufsaugt. Doch kommt ein so extremer Fall in der Praxis eines Wahlganges kaum vor. Entscheidend wichtig ist aber der nächste Punkt.

2. Die Auf- und Abrundungen sind nicht rein zufällig, bedingt durch die Abweichung der S_i von der nächsten ganzen Zahl, sondern sie werden systematisch beeinflusst von der Gruppengrösse [siehe c)]. Nun erfolgt die Verteilung bei einer Proportionalwahl stets getrennt in einer grösseren Anzahl von Wahlkreisen, deren relative Gruppengrössen nicht stark voneinander abweichen. Der Laie erwartet, dass sich dabei die Abweichungen der einzelnen Wahlkreise mehr oder weniger ausgleichen. Soweit sie aber systematisch bedingt sind, müssen sie sich im Gegenteil summieren. Die Praxis zeigt das klar, und der Stimmbürger steht nicht selten verständnislos vor einer Verteilung, die mit Proportionalität wenig zu tun hat. A. Stoll, Zürich

Verallgemeinerung des Jacobischen Knotensatzes

1. Jacobi hat für das astronomische Dreikörperproblem aus dem Satz von der Erhaltung des Impulsmomentes eine Folgerung gezogen, die als Knotensatz bezeichnet wird. Bei seinem Beweise werden gewöhnlich die Bewegungen der drei Körper als gestörte Kepler-Bewegungen betrachtet, so dass gewisse Formeln aus der Theorie dieser Bewegungen explizit in den Beweis eingehen [1][1]). Hierdurch wird aber die Tatsache verdeckt, dass es sich gar nicht um einen spezifischen Satz der Himmelsmechanik handelt, sondern vielmehr um einen Satz, der für jedes Dreikörpersystem mit Zentralkräften gilt.

Um anschaulich zu machen, worum es sich handelt, betrachten wir zunächst einen Spezialfall. Es seien $m_0=1$, $m_1 \ll 1$, $m_2 \ll 1$ die Massen der drei Körper 0, 1, 2; $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ ihre Ortsvektoren, bezogen auf den Schwerpunkt des Systems, und $\mathfrak{v}_0, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ die entsprechenden Geschwindigkeitsvektoren. Nun gelten für jedes n-Körpersystem mit Zentralkräften der Schwerpunktsatz sowie die Sätze von der Erhaltung des Impulses und des Impulsmomentes. Im vorliegenden Fall lauten sie:

$$\mathfrak{r}_0 + m_1 \mathfrak{r}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2 = 0,$$

$$\mathfrak{v}_0 + m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2 = 0,$$

$$\mathfrak{r}_0 \times \mathfrak{v}_0 + m_1 \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{h} \equiv \text{konst.}$$

Wir führen die relativen Orts- und Geschwindigkeitsvektoren

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}_i' &= \mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_0, \\ \mathfrak{v}_i' &= \mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0, \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2)$$

in den Erhaltungssatz für das Impulsmoment ein. Eine kurze Zwischenrechnung, bei der wir vom Schwerpunkt- und vom Impulssatz Gebrauch machen, ergibt dann:

$$\sum_1^2 m_i \mathfrak{r}_i' \times \mathfrak{v}_i' = \mathfrak{h} + (m_1 \mathfrak{r}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2) \times (m_1 \mathfrak{v}_1' + m_2 \mathfrak{v}_2') = \mathfrak{h} + \mathfrak{O}(m_1^2 + m_2^2).$$

Im Falle $\mathfrak{h} = 0$ sind also die Relativbewegungen der beiden Trabanten in jedem Augenblick nahezu komplaner bei entgegengesetztem Umlaufsinn.

Für das folgende werde $\mathfrak{h} \neq 0$ vorausgesetzt. Wir erweitern vektoriell mit dem zu $\mathfrak{h}$ kollinearen Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ und erhalten

$$\sum_1^2 m_i (\mathfrak{r}_i' \times \mathfrak{v}_i') \times \mathfrak{n} = \mathfrak{O}(m_1^2 + m_2^2).$$

---

1) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 127.

Die beiden Vektoren auf der linken Seite deuten wir anschaulich folgendermassen: Wäre zum Beispiel $m_2 = 0$ und $\mathfrak{r}_1' \times \mathfrak{v}_1' \neq 0$, so würde sich der Körper 1 in der durch $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{v}_1'$ aufgespannten Ebene bewegen. $\mathfrak{r}_1' \times \mathfrak{v}_1'$ steht auf dieser «momentanen Bahnebene» senkrecht. Ferner steht $\mathfrak{n}$ auf der invariablen Ebene des Systems senkrecht. Wenn diese beiden Ebenen nicht zusammenfallen, so liegt der Vektor $(\mathfrak{r}_1' \times \mathfrak{v}_1') \times \mathfrak{n}$ in ihrer Schnittlinie, der «Knotenlinie», und prägt ihr eine Orientierung auf. Aus der letzten Gleichung lesen wir daher ab: *Die Richtungen der beiden Knotenlinien sind nahezu entgegengesetzt.* Genauer ergibt eine leichte Rechnung für den Winkel zwischen den Knotenlinien den Wert $\pi + O(m_1 + m_2)$. Das ist unsere spezielle Fassung des Knotensatzes.

2. In der allgemeinen Fassung werden keinerlei Voraussetzungen über die drei Massen gemacht. Definiert man nun nach JACOBI neue «Ortsvektoren» $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ durch

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0, \qquad \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{r}_2 - \frac{m_0 \mathfrak{r}_0 + m_1 \mathfrak{r}_1}{m_0 + m_1},$$

neue «Geschwindigkeitsvektoren» $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ entsprechend und neue «Massen» M_1, M_2 durch [1]

$$M_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} m_1, \qquad M_2 = \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} m_2,$$

so gilt der Erhaltungssatz

$$M_1 \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{V}_1 + M_2 \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{V}_2 = 0.$$

Für ihn hat JACOBI im Falle des astronomischen Dreikörperproblems die geometrische Deutung mittels der Knotenlinien gegeben. Dieser Erhaltungssatz überträgt sich aber (wie man ohne weiteres nachrechnet) auf Systeme mit beliebigen Zentralkräften zwischen den drei Körpern. Indem man wieder mit $\mathfrak{n}$ vektoriell erweitert, erhält man den allgemeinen Knotensatz – nun aber in der schärferen Form, dass die Richtungen der beiden Knotenlinien exakt entgegengesetzt sind.

3. Wenn die Zentralkräfte den Massen proportional sind, so können wir dem speziellen Satz eine vielleicht noch anschaulichere Form geben. Die beiden relativen Ortsvektoren $\mathfrak{r}_1'$, $\mathfrak{r}_2'$ sind dann nämlich nahezu kollinear mit den relativen Beschleunigungen $\ddot{\mathfrak{r}}_1'$ bzw. $\ddot{\mathfrak{r}}_2'$. Und zwar gilt

$$\ddot{\mathfrak{r}}_i' = \varphi(|\mathfrak{r}_i'|) \frac{\mathfrak{r}_i'}{|\mathfrak{r}_i'|} + \mathfrak{O}(m_1 + m_2) \qquad (i = 1, 2),$$

wobei $\pm \varphi(r)$ den Betrag der Kraft zwischen zwei Einheits-Massenpunkten im Abstande r voneinander bedeutet. Das ergibt sich ohne weiteres aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathfrak{r}}_0 = m_1 \varphi(|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0|) \frac{\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0|} + m_2 \varphi(|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_0|) \frac{\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_0}{|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_0|}, \qquad \text{usw.}$$

Drückt man nun in der letzten Gleichung des ersten Abschnitts $\mathfrak{r}_i'$ durch $\ddot{\mathfrak{r}}_i'$ aus, so folgt

$$\sum_1^2 m_i \frac{|\mathfrak{r}_i'|}{\varphi(|\mathfrak{r}_i'|)} (\ddot{\mathfrak{r}}_i' \times \dot{\mathfrak{r}}_i') \times \mathfrak{n} = \mathfrak{O}(m_1^2 + m_2^2),$$

wobei wir $\dot{\mathfrak{r}}_i'$ für $\mathfrak{v}_i'$ geschrieben haben. Nun steht der Vektor $(\ddot{\mathfrak{r}}_i' \times \dot{\mathfrak{r}}_i')$ auf der oskulierenden Ebene des betreffenden Trabanten senkrecht («oskulierend» im Sinne der Differentialgeometrie, *nicht* im Sinne der Himmelsmechanik). Daher gilt: *Der Winkel zwischen den orientierten Geraden, in denen die oskulierenden Ebenen der beiden Trabanten die invariable Ebene des Systems schneiden, beträgt* $\pi + O(m_1 + m_2)$.

Der allgemeine Knotensatz lässt die entsprechende Umformulierung nicht zu. Der Beweis dieser letzten Behauptung ist an sich einfach, aber etwas umständlich und mag daher übergangen werden.

4. Für die Veranschaulichung des Satzes an konkreten Beispielen ist die spezielle Fassung bequemer. Zwei Fälle sind möglich: 1. Zentralkörper–Trabant–Untertrabant, und 2. Zentralkörper–Trabant–Trabant. Der erste Fall wird durch das System Sonne–Erde–Mond verwirklicht. Bei ihm leuchtet der behauptete Sachverhalt anschaulich sofort ein. Interessanter ist der zweite Fall. Mars mit seinen beiden Monden würde ihn repräsentieren, vorausgesetzt, dass die Störkraft der Sonne nicht zu gross ist. Leider scheint dies aber der Fall zu sein [2]. Natürlich liesse sich der Einfluss äusserer Störkräfte mittels der Erhaltungssätze für das n-Körper-System exakt abschätzen. Bei zu grossen Störkräften (wie sie allem Anschein nach tatsächlich vorliegen) wird jedoch diese Abschätzung inhaltslos. Vielleicht wird der Fall 2 von Neptun und seinen beiden Trabanten verwirklicht. Da aber der zweite Mond erst vor kurzem entdeckt worden ist, so dürften die erforderlichen Daten noch nicht erhältlich sein. R. KURTH, Manchester

LITERATURVERZEICHNIS

[1] C. L. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, Band 1 (Leipzig 1902).
[2] H. STRUWE, *Über die Lage der Marsachsen und die Konstanten im Marssystem*. Sitz.-Ber. preuss. Akad. Wiss. *1911*.

Spieltheoretische Betrachtungen zur Stummen Mora

Das untenstehende strategische Spiel hat sich in der Spieltheorie als fundamental erwiesen. Es gestattet, den besonders wichtigen Begriff der gemischten Strategie in

	g	u
g	$+1$	-1
u	-1	$+1$

g gerade; u ungerade.

elementarer und anschaulicher Weise einzuführen. In der englischen Literatur erscheint die angeschriebene Matrix als schematische Darstellung des Matching Pennies. Es ist ein Zweipersonenspiel mit Summe Null und wird gespielt, indem zwei Spieler beide gleichzeitig eine Münze auf den Tisch legen. Zeigen beide «Kopf», dann hat der erste, andernfalls, wenn beide Münzen «Zahl» aufweisen, der zweite eine Einheit gewonnen. Dieses Spiel hat sicher auch seinen Reiz, mag indessen, auf die Länge gespielt, eintönig wirken. Es dürfte deshalb nicht uninteressant sein, darauf hinzuweisen, dass es ein anderes Spiel gibt, das die gleiche strategische Matrix aufweist, grösseren Anreiz bietet und gleichzeitig zu interessanten psychologischen Erwägungen führt. Es handelt sich um die Stumme Mora, ein (2×2)-Strategienspiel, das gegenüber der allgemeinen Mora den Vorteil hat, dass es mit weniger Aufsehen und Lärm gespielt werden kann. Jede Person weist bei jeder Runde mit der rechten Hand eine Anzahl ausgestreckte Finger vor. Ist die Summe der ausgestreckten Finger gerade, dann hat der erste Spieler, ist sie ungerade, dann der zweite Spieler eine Einheit gewonnen. Die «reinen Strategien» der beiden Spieler bestehen darin, dass beide die Möglichkeit haben, entweder Gerade oder Ungerade zu bieten. Die Minimax- bzw. Maximin-Strategien ergeben sich durch Mischung dieser reinen Strategien im Verhältnis 1:1. Der Wert des Spieles ist Null, das heisst, es handelt sich um ein faires Spiel.

Besonderen Reiz gewinnt das Spiel dadurch, dass es jedem Spieler unbenommen ist, seinen Gegner auszuspionieren, sein allfälliges ungeschicktes Verhalten auszunützen, um dadurch entsprechende Gewinne zu erzielen. Beide können sich, wie die Theorie zeigt, gegen solche Intentionen nur erfolgreich wehren, indem sie möglichst vorschriftsgemäss Gerade und Ungerade mit den Häufigkeiten 0,5 zu 0,5 spielen. Die praktische Erfüllung dieser Forderung ist indessen schwierig. Wenn ein Spieler aufs Geratewohl fortlaufend eine Anzahl Finger ausstreckt, so ist nicht gesagt, dass die Wahrscheinlichkeit für Gerade gleich gross ist wie für Ungerade. Im Gegenteil, es ist eher anzunehmen, dass das Gewohnheitsmässige vorherrschend wirkt, so dass Unterschiede auftreten. Beachtet man ferner, dass in der Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 und 5 eine gerade Summe nur zweimal, eine ungerade aber dreimal vertreten ist, so muss man nach dem Satz des mangelnden Grundes schliessen, dass sich die Wahrscheinlichkeiten für Gerade und Ungerade bei undeterminierter Spielweise wie 2:3 verhalten, also nicht wie 1:1, wie es erforderlich wäre. Das heisst also, dass ein Spieler, der es versteht, sich von jedem gewohnheitsmässigen Verhalten zu befreien und alle Fingerzahlen entsprechend ihrer Häufigkeit bietet, strategisch nicht richtig vorgeht, weil er die Verteilung 0,4:0,6, statt 0,5:0,5 benützt. Verfallen beide Spieler dem gleichen Fehler, so zeigt die Rechnung, dass dem ersten im Durchschnitt ein unverdienter Gewinn von 0,04 pro Runde zufällt, während dem zweiten ein ebensogrosser Verlust erwächst. Erkennt ein Spieler diese Ungeschicklichkeit beim andern, so kann er sie ausnützen und im Durchschnitt einen Gewinn bis zu 0,2 pro Runde erzielen, also einen beachtenswerten Erfolg erreichen, wenn man bedenkt, dass bei geübten Spielern eine Runde nur etwa eine Sekunde beansprucht. Die Aufgabe, direkt, ohne Zuhilfenahme eines Zufallsmechanismus oder von Tabellen über Zufallszahlen, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 zu spielen, dürfte kaum zu bewältigen sein. Der Mensch erscheint ausserstande, rein zufällig zu handeln. Er besitzt keine in ihm eingebaute «Urne», auf die er sich verlassen könnte. Er besitzt bloss die «Fähigkeit», gedankenlos zu handeln. Dieses kann indessen einem zufälligen Benehmen nicht gleichgestellt werden. Die gedankenlose Verrichtung einer Aufgabe wird erfahrungsgemäss durch instinktives Verhalten stark beeinflusst, was beim Spiel tunlichst vermieden werden muss.

Die Aufgabe, den Zufall zu imitieren, ohne umständliche Zufallsmechanismen zu Hilfe nehmen zu müssen, dürfte im Falle der Stummen Mora am ehesten gelingen, wenn sich der Spieler darauf beschränken könnte, die Zahl der Finger mit gleicher Frequenz erscheinen zu lassen. Es stellt sich damit die Frage, ob das Spiel so modifiziert werden kann, dass diese Forderung erfüllt wird. Tatsächlich bestehen dazu, wie man auf Grund der Spieltheorie nachweisen kann, verschiedene Möglichkeiten.

1. Werden die Werte der strategischen Matrix abgeändert, so dass diese lautet:

	g	u
g	2	−1
u	−1	1

so ergeben sich sowohl für die Maximin- als auch für die Minimax-Strategie das gewünschte Zahlenverhältnis 2:3. Die gestellte Bedingung wäre also erfüllt. Dieses Spiel ist aber nicht fair. Sein Wert ist $v = 1/5$, das heisst, auf fünf Runden könnte der erste Spieler bei strategisch richtigem Verhalten im Durchschnitt eine Einheit gewinnen. Damit der zweite Spieler nicht von vornherein benachteiligt ist, müsste sich der erste auf Grund einer Nebenvereinbarung verpflichten, für je fünf Spiele eine Entschädigung von einer Einheit an den zweiten zu zahlen.

2. Indessen lassen sich die Zahlenwerte der strategischen Matrix auch so ändern, dass das gewünschte Zahlenverhältnis resultiert und das Spiel trotzdem fair bleibt. Das einfachste Beispiel dürfte sein:

	g	u
g	9	−6
u	−6	4

Der Wert dieses Spieles ist tatsächlich Null, während die besten Strategien das Zahlenverhältnis 2:3 aufweisen.

Selbstverständlich kann die Stumme Mora auch anders gespielt werden, so zum Beispiel nur mit vier Fingern. Da eine Hand fünf und nicht vier Finger aufweist, ergeben sich bei solchen Abarten leicht Zweideutigkeiten, so dass eine Änderung der Zahlenmatrix wohl vorzuziehen wäre.

Jedenfalls erscheint es überraschend, dass ein elementares Spiel wie die Stumme Mora bereits Ingredienzen enthält, zu deren Klärung die Hilfsmittel der Spieltheorie herangezogen werden müssen. P. NOLFI, Zürich

Aufgaben

Aufgabe 276. If $\{x\}$ denotes the integer closest to x, prove that

$$\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{k}\} = \frac{\{\sqrt{n}\}\left(3n+1-\{\sqrt{n}\}^2\right)}{3}. \qquad (*)$$

LEO MOSER, Edmonton (Kanada), und J. LAMBEK, Montreal

Lösung: Alle Buchstaben sollen natürliche Zahlen bedeuten. Es ist

$$\{\sqrt{a^2+a}\} = \left\{\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right\} = a. \qquad (1)$$

Unter den Zahlen k mit $\{\sqrt{k}\}=a$ ist a^2+a offenbar die grösste. Die Anzahl dieser k ist somit

$$a^2+a-[(a-1)^2+a-1] = 2a.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{k=1}^{p^2+p}\{\sqrt{k}\} = \sum_{a=1}^{p} 2a^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{3} = \frac{p}{3}[3(p^2+p)+1-p^2]. \qquad (2)$$

(*) ist also wegen (1) für $n=p^2+p$ richtig. Hieraus folgt für $q<2p$

$$\sum_{k=1}^{n-q}\{\sqrt{k}\} = \frac{\{\sqrt{n}\}\left(3n+1-\{\sqrt{n}\}^2\right)}{3} - \sum_{k=n-q+1}^{n}\{\sqrt{k}\}. \qquad (3)$$

Wegen

$$\{\sqrt{n}\} = p = \{\sqrt{n-q}\} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=n-q+1}^{n}\{\sqrt{k}\} = qp = q\{\sqrt{n-q}\}$$

geht (3) über in

$$\sum_{k=1}^{n-q}\{\sqrt{k}\} = \frac{\{\sqrt{n-q}\}\left[3(n-q)+1-\{\sqrt{n-q}\}^2\right]}{3}.$$

Auch in diesem Fall ist also (*) gültig. Da (2) für jedes p richtig ist, gilt (*) allgemein.

F. LEUENBERGER, Zuoz

Wird die rechte Seite von (*) mit $f(n)$ bezeichnet, so gilt

$$f(n+1)-f(n) = \{\sqrt{n+1}\}.$$

Wegen $f(1)=1$ ergibt sich hieraus (*) durch vollständige Induktion.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), L. CARLITZ (Durham, N. C., USA), R. LAUFFER (Graz), F. LEUENBERGER (2. Lösung), H. MEILI (Winterthur), J. PIEHLER (Leuna), W. RICHTER (Neuchâtel).