

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 3

Artikel: Über eine elementargeometrische Aufgabe, die auf ein klassisches Problem der Geometrie führt
Autor: Hoffmann, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19773>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.	Band XIII	Nr. 3	Seiten 49–72	Basel, 10. Mai 1958
-----------	-----------	-------	--------------	---------------------

Über eine elementargeometrische Aufgabe, die auf ein klassisches Problem der Geometrie führt

In zwei Ebenen ε und ε' , die auch identisch sein können, ist je eine Gruppe von *fünf* Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 bzw. $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5$ gegeben, wobei je zwei Punkte der beiden Gruppen mit demselben Index einander zugeordnet sein sollen. Wir fragen nun nach zwei Punkten S und S' in den Ebenen ε bzw. ε' von der Eigenschaft, dass das Strahlenbüschel, das sich durch Projektion der Punkte der ersten Gruppe aus dem Punkt S in der Ebene ε ergibt, kongruent ist dem Strahlenbüschel, das durch Projektion der Punkte der zweiten Gruppe aus dem Punkt S' in der Ebene ε' entsteht, wobei je zwei Strahlen der beiden Büschel, die durch zugeordnete Punkte der beiden Punktgruppen hindurchgehen, einander entsprechen sollen.

Nun sind bekanntlich zwei Strahlenbüschel dann und nur dann kongruent, wenn sie projektiv so aufeinander bezogen sind, dass die isotropen Geraden der beiden Büschel einander entsprechen. Bezeichnen wir also die absoluten Kreispunkte der Ebene ε mit J und K und jene der Ebene ε' mit J' und K' , so beinhaltet die oben gestellte Aufgabe die Forderung, dass das Strahlenbüschel, das sich durch Projektion der *sieben* Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, J, K$ aus dem Punkt S in der Ebene ε ergibt, *projektiv* sei jenem Strahlenbüschel, das sich durch Projektion der *sieben* Punkte $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5, J', K'$ in dieser oder in der Anordnung $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5, K', J'$ in der Ebene ε' ergibt. Sind die beiden Ebenen ε und ε' identisch und stellen J und J' und K und K' jeweils denselben absoluten Kreispunkt der Ebene $\varepsilon = \varepsilon'$ dar, so sind im ersteren Falle die beiden Strahlenbüschel gleichsinnig und im zweiten Falle ungleichsinnig kongruent.

Die Aufgabe nun, zwei Gruppen von je *sieben* Punkten einer Ebene, die paarweise aufeinander bezogen sind, aus zwei Punkten dieser Ebene durch projektive Strahlenbüschel zu projizieren, stellt ein klassisches Problem der Geometrie dar und wird als das *Problem der Projektivität* bezeichnet¹⁾.

Liegen die beiden Punktgruppen in verschiedenen Ebenen, so bedeutet dies natürlich keine wesentliche Verallgemeinerung des Problems.

Wir geben hier zunächst eine einfache Lösung des Problems der Projektivität und wenden diese dann auf die Durchführung der eingangs gestellten Aufgabe an.

¹⁾ M. CHASLES, Nouv. Ann. Math. 14, 211 (1855).

Wir gehen von zwei Ebenen ε und ε' aus, legen in diesen projektive Koordinaten, x, y, z bzw. x', y', z' fest und betrachten die bilineare Beziehung

$$\left. \begin{aligned} & a_{11} x x' + a_{12} x y' + a_{13} x z' \\ & + a_{21} y x' + a_{22} y y' + a_{23} y z' \\ & + a_{31} z x' + a_{32} z y' + a_{33} z z' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

zwischen den Koordinaten in den beiden Ebenen. Wir setzen dabei voraus, dass die aus den Koeffizienten von (1) gebildete Determinante nicht verschwinde, dass also

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2)$$

sei.

Die vermöge (1) zwischen den Ebenen ε und ε' hergestellte geometrische Beziehung bezeichnet man bekanntlich als *Korrelation* und nennt zwei Punkte $P(x, y, z)$ und $P'(x', y', z')$ von ε bzw. ε' , deren Koordinaten der Gleichung (1) genügen, *konjugiert*.

Schreibt man (1) in der Form

$$(a_{11} x + a_{21} y + a_{31} z) x' + (a_{12} x + a_{22} y + a_{32} z) y' + (a_{13} x + a_{23} y + a_{33} z) z' = 0, \quad (3)$$

so erkennt man, dass wegen (2) ausnahmslos jedem Punkt $P(x, y, z)$ von ε als Gesamtheit der zu P konjugierten Punkte in ε' eine Gerade p' entspricht, wobei die Zuordnung zwischen den Punkten von ε und den Geraden von ε' umkehrbar eindeutig ist.

In völlig analoger Weise entspricht jedem Punkt $P'(x', y', z')$ von ε' als Gesamtheit der zu P' konjugierten Punkte in ε eine Gerade p , wobei die Zuordnung zwischen den Punkten von ε' und den Geraden von ε wieder umkehrbar eindeutig ist. Liegt dabei der Punkt P in ε auf der Geraden p , so geht umgekehrt die Gerade p' in ε' durch den Punkt P' hindurch.

Da schliesslich die Gleichung (1) acht unabhängige Koeffizienten enthält, ist eine Korrelation zwischen zwei Ebenen durch acht Paare von konjugierten Punkten bestimmt.

Wir setzen nun voraus, dass die Determinante Δ verschwinde und vom Range zwei sei.

Die drei Geraden

$$a_{11} x + a_{21} y + a_{31} z = 0,$$

$$a_{12} x + a_{22} y + a_{32} z = 0,$$

$$a_{13} x + a_{23} y + a_{33} z = 0$$

der Ebene ε schneiden sich dann in einem Punkt $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dieser Ebene, und zu diesem Punkt sind, wie man aus (3) erkennt, alle Punkte der Ebene ε' konjugiert.

Nun kann man (1) aber auch in der Form

$$(a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13} z') x + (a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23} z') y + (a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33} z') z = 0 \quad (4)$$

schreiben. Wegen $\Delta = 0$ schneiden sich nun auch die drei Geraden

$$a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13} z' = 0,$$

$$a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23} z' = 0,$$

$$a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33} z' = 0$$

der Ebene ε' in einem Punkt $S'(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ dieser Ebene, und zu diesem Punkt sind, wie man aus (4) erkennt, alle Punkte der Ebene ε konjugiert.

Die Punkte S und S' sind *singuläre Punkte* der Korrelation, die dann als *ausgeartet* bezeichnet wird.

Wie weiter aus (3) ersichtlich ist, entspricht jedem von S' verschiedenen Punkt P' von ε' als Gesamtheit der zu P' konjugierten Punkte in ε eine Gerade p , die durch den Punkt S hindurchgeht. Umgekehrt entspricht wegen (4) jedem von S verschiedenen Punkt P von ε als Gesamtheit der zu P konjugierten Punkte in ε' eine Gerade p' , die durch den Punkt S' hindurchgeht. Liegt dabei der Punkt P auf der Geraden p , so geht die Gerade p' durch den Punkt P' hindurch, und zu jedem Punkt von p ist jeder Punkt von p' konjugiert.

Geht man von einer beliebigen Geraden p des Büschels S in ε aus, so entspricht ihr als Ort aller Punkte, die den von S verschiedenen Punkten von p konjugiert sind, in ε' eine Gerade p' des Büschels S' . Die so zwischen den Strahlenbüscheln S und S' hergestellte geometrische Verwandtschaft ist nun, wie man leicht erkennt, eine Projektivität.

Schneidet man nämlich die Büschel S und S' bzw. mit den Fundamentalgeraden $z = 0$ und $z' = 0$ der in den Ebenen ε und ε' festgelegten Koordinatensysteme, so besteht zwischen den Koordinaten der Schnittpunkte $Q(x, y, 0)$ und $Q'(x', y', 0)$ je zweier entsprechenden Geraden der beiden Büschel S und S' mit den betreffenden Fundamentalgeraden in ε und ε' wegen (1) die bilineare Beziehung

$$a_{11} x x' + a_{12} x y' + a_{21} y x' + a_{22} y y' = 0.$$

Demnach sind also die Punktreihen Q und Q' und daher auch die Strahlenbüschel S und S' projektiv.

Besteht also zwischen zwei ebenen Systemen ε und ε' eine ausgeartete Korrelation, so gibt es in jeder der beiden Ebenen je einen singulären Punkt S bzw. S' , und zwischen den Strahlenbüscheln S und S' besteht eine Projektivität von der Art, dass je zwei konjugierte Punkte der zwei ebenen Systeme entsprechenden Strahlen der beiden Büschel S und S' angehören.

Legt man umgekehrt in zwei Ebenen ε und ε' zwei projektive Strahlenbüschel S und S' fest, so ist damit, wie man leicht erkennt, in eindeutiger Weise eine ausgeartete Korrelation zwischen den beiden Ebenen definiert, für welche je zwei entsprechenden Strahlen der beiden Büschel angehörende Punkte konjugiert sind.

Wie wir gesehen haben, ist eine nichtausgeartete Korrelation zwischen zwei Ebenen durch acht Paare von konjugierten Punkten bestimmt. Da nun die Koeffizienten einer ausgearteten Korrelation der Bedingung $\Delta = 0$ genügen, ist eine *ausgeartete Korrelation* zwischen zwei Ebenen durch *sieben* Paare von konjugierten Punkten bestimmt.

Das Problem der Projektivität beinhaltet nach dem oben Gesagten die Aufgabe, zu sieben gegebenen Paaren von konjugierten Punkten die zugehörigen ausgearteten Korrelationen zu bestimmen. Die Aufgabe hat, wie allgemein bekannt und wir noch des näheren ausführen werden, drei Lösungen, von denen, wie bei jeder Aufgabe dritten Grades, mindestens eine reell sein muss.

Es sollen nun also in den Ebenen ε und ε' je sieben Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ bzw. $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5, P'_6, P'_7$ gegeben sein²⁾, und wir fragen nach den ausgearteten Korrelationen zwischen den beiden Ebenen, für welche je zwei Punkte P_i, P'_i ($i = 1, \dots, 7$) konjugiert sind.

Wir legen zunächst in den Ebenen ε und ε' projektive Koordinaten (x, y, z) bzw. (x', y', z') fest, wobei wir in ε die Punkte P_5, P_6, P_7 und analog dazu in ε' die Punkte P'_5, P'_6, P'_7 bzw. als Fundamentalpunkte $(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)$ der Koordinatensysteme wählen. Die Koordinaten der weiteren Punkte bezeichnen wir dann in der folgenden Weise: $P_i(x_i, y_i, z_i); P'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$, ($i = 1, \dots, 4$).

Nun sind, wie wir gesehen haben, die Korrelationen zwischen zwei Ebenen durch bilineare Gleichungen zwischen den Koordinaten in diesen Ebenen, durch Gleichungen also von der Form (1) gegeben. Fragen wir nun zunächst nach *allen* unendlich vielen Korrelationen zwischen den Ebenen ε und ε' , für welche die sieben Punktpaare (P_i, P'_i) , ($i = 1, \dots, 7$) Paare konjugierter Punkte darstellen, so ergeben sich, wenn man in (1) der Reihe nach die Koordinaten je zweier konjugierter Punkte P_i und P'_i einsetzt, sieben Gleichungen für die neun Koeffizienten von (1).

So ergibt sich aus dem Punktpaar $P_5(1, 0, 0); P'_5(1, 0, 0)$, dass $a_{11} = 0$, aus dem Punktpaar $P_6(0, 1, 0); P'_6(0, 1, 0)$, dass $a_{22} = 0$ und schliesslich aus dem Punktpaar $P_7(0, 0, 1); P'_7(0, 0, 1)$, dass $a_{33} = 0$ ist.

Setzt man in (1) $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, so vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$a_{12} x y' + a_{13} x z' + a_{21} y x' + a_{23} y z' + a_{31} z x' + a_{32} z y' = 0. \quad (5)$$

Durch Heranziehung der vier weiteren Punktpaare $(P_1, P'_1), (P_2, P'_2), (P_3, P'_3), (P_4, P'_4)$ ergeben sich nun aus (5) für die restlichen *sechs* Koeffizienten $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ die *vier* Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a_{12} x_1 y'_1 + a_{13} x_1 z'_1 + a_{21} y_1 x'_1 + a_{23} y_1 z'_1 + a_{31} z_1 x'_1 + a_{32} z_1 y'_1 &= 0, \\ a_{12} x_2 y'_2 + a_{13} x_2 z'_2 + a_{21} y_2 x'_2 + a_{23} y_2 z'_2 + a_{31} z_2 x'_2 + a_{32} z_2 y'_2 &= 0, \\ a_{12} x_3 y'_3 + a_{13} x_3 z'_3 + a_{21} y_3 x'_3 + a_{23} y_3 z'_3 + a_{31} z_3 x'_3 + a_{32} z_3 y'_3 &= 0, \\ a_{12} x_4 y'_4 + a_{13} x_4 z'_4 + a_{21} y_4 x'_4 + a_{23} y_4 z'_4 + a_{31} z_4 x'_4 + a_{32} z_4 y'_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wenn wir nun aber zusätzlich einem der in ε gegebenen Punkte P_i , also etwa dem Punkt P_5 , in ε' eine beliebige durch P'_5 hindurchgehende Gerade p'_5 (Figur 1) als korrelativ entsprechend zuordnen, so ist, wie man leicht erkennt, in eindeutiger Weise eine Korrelation zwischen den Ebenen ε und ε' festgelegt.

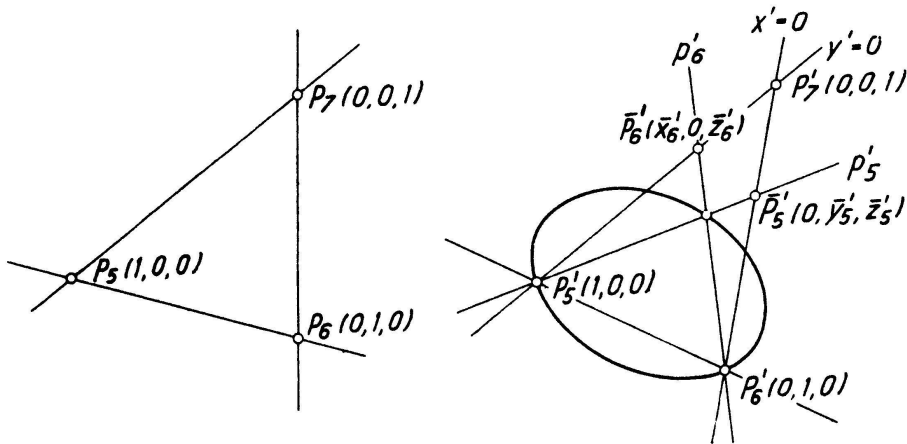
²⁾ Wir setzen dabei voraus, dass keine drei in derselben Ebene gegebene Punkte auf einer Geraden liegen.

Der Schnittpunkt $\bar{P}'_5$ der Geraden p'_5 mit der Fundamentalgeraden $x' = 0$ des Koordinatensystemes in ε' — wir bezeichnen seine Koordinaten mit $(0, \bar{y}'_5, \bar{z}'_5)$ — ist nämlich auch zum Punkt P_5 konjugiert, und setzen wir also die Koordinaten der Punkte P_5 und $\bar{P}'_5$ in (5) ein, so ergibt sich für die Koeffizienten $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ die weitere Gleichung

$$a_{12} \bar{y}'_5 + a_{13} \bar{z}'_5 = 0. \quad (7)$$

Durch fünf Gleichungen sind diese sechs Koeffizienten aber dem Verhältnis nach bestimmt, und die Korrelation ist somit festgelegt.

Die dann dem Punkt P_6 von ε in der Ebene ε' korrelativ entsprechende Gerade p'_6 kann nun sehr leicht bestimmt werden. Der Schnittpunkt $\bar{P}'_6$ dieser Geraden mit der Fundamentalgeraden $y' = 0$ des Koordinatensystemes in ε' — wir bezeichnen seine Ko-



Figur 1

ordinaten mit $(\bar{x}'_6, 0, \bar{z}'_6)$ — ist ja zum Punkt P_6 konjugiert, so dass sich durch Einsetzen der Koordinaten dieser beiden Punkte in (1) die Gleichung

$$a_{21} \bar{x}'_6 + a_{23} \bar{z}'_6 = 0 \quad (8)$$

ergibt. Durch (8) ist aber der Punkt $\bar{P}'_6$ und damit auch die Gerade p'_6 bestimmt.

Wegen (6), (7) und (8) bestehen nun zwischen den sechs Koeffizienten $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ die sechs linearen homogenen Gleichungen

$$a_{12} \bar{y}'_5 + a_{13} \bar{z}'_5 = 0,$$

$$a_{21} \bar{x}'_6 + a_{23} \bar{z}'_6 = 0,$$

$$a_{12} x_1 y'_1 + a_{13} x_1 z'_1 + a_{21} y_1 x'_1 + a_{23} y_1 z'_1 + a_{31} z_1 x'_1 + a_{32} z_1 y'_1 = 0,$$

$$a_{12} x_2 y'_2 + a_{13} x_2 z'_2 + a_{21} y_2 x'_2 + a_{23} y_2 z'_2 + a_{31} z_2 x'_2 + a_{32} z_2 y'_2 = 0,$$

$$a_{12} x_3 y'_3 + a_{13} x_3 z'_3 + a_{21} y_3 x'_3 + a_{23} y_3 z'_3 + a_{31} z_3 x'_3 + a_{32} z_3 y'_3 = 0,$$

$$a_{12} x_4 y'_4 + a_{13} x_4 z'_4 + a_{21} y_4 x'_4 + a_{23} y_4 z'_4 + a_{31} z_4 x'_4 + a_{32} z_4 y'_4 = 0,$$

und eliminiert man aus diesem Gleichungssystem diese sechs Koeffizienten, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \bar{y}'_5 & \bar{z}'_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{x}'_6 & \bar{z}'_6 & 0 & 0 \\ x_1 y'_1 & x_1 z'_1 & y_1 x'_1 & y_1 z'_1 & z_1 x'_1 & z_1 y'_1 \\ x_2 y'_2 & x_2 z'_2 & y_2 x'_2 & y_2 z'_2 & z_2 x'_2 & z_2 y'_2 \\ x_3 y'_3 & x_3 z'_3 & y_3 x'_3 & y_3 z'_3 & z_3 x'_3 & z_3 y'_3 \\ x_4 y'_4 & x_4 z'_4 & y_4 x'_4 & y_4 z'_4 & z_4 x'_4 & z_4 y'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie stellt, wie man durch Entwicklung der Determinante unmittelbar erkennt, eine *bilineare* Beziehung zwischen den Koordinaten $\bar{y}'_5, \bar{z}'_5$ des Punktes $\bar{P}'_5$ auf der Geraden $x' = 0$ und den Koordinaten $\bar{y}'_6, \bar{z}'_6$ des Punktes $\bar{P}'_6$ auf der Geraden $y' = 0$ dar. Wir schreiben sie kurz in der Form

$$(A \bar{y}'_5 + B \bar{z}'_5) \bar{x}'_6 + (C \bar{y}'_5 + D \bar{z}'_5) \bar{z}'_6 = 0, \quad (9)$$

wobei die Koeffizienten A, B, C, D lediglich die Koordinaten der gegebenen Punkte enthalten.

Ordnet man dem Punkt P_5 von ε eine beliebige durch den Punkt P'_5 hindurchgehende Gerade p'_5 von ε' korrelativ zu, so ist damit, wie wir gesehen haben, in eindeutiger Weise eine zu den sieben Paaren konjugierter Punkte (P_i, P'_i) , $(i = 1, \dots, 7)$ gehörende Korrelation zwischen den beiden Ebenen ε und ε' bestimmt. Lässt man die Gerade p'_5 in ε' das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P'_5 durchlaufen, so ergeben sich alle diese Korrelationen, zu denen natürlich auch die ausgearteten gehören.

Beschreibt die Gerade p'_5 in der Ebene ε' das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P'_5 , so beschreibt die dem Punkt P_6 von ε jeweils korrelativ entsprechende Gerade p'_6 in ε' das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P'_6 . Nun sind die von diesen beiden Büscheln bzw. auf den Geraden $x' = 0$ und $y' = 0$ in der Ebene ε' ausgeschnittenen Punktreihen $\bar{P}'_5$ und $\bar{P}'_6$ wegen (9) projektiv, so dass also auch die beiden Strahlenbüschel selbst projektiv sind. Die beiden Büschel erzeugen demnach einen Kegelschnitt 1, der durch die beiden Punkte P'_5 und P'_6 hindurchgeht.

Natürlich besteht zwischen je zwei der Punktepaaire (P_i, P'_i) , $(i = 1, \dots, 7)$ ein dem hier zwischen den Punktepaairen (P_5, P'_5) und (P_6, P'_6) dargelegten vollkommen analoger Sachverhalt. So ist in jeder durch beliebige Wahl der Geraden p'_5 als Strahl des Büschels P'_5 zwischen den Ebenen ε und ε' festgelegten Korrelation dem Punkt P_7 von ε eine Gerade p'_7 durch den Punkt P'_7 in ε' korrelativ zugeordnet, und beschreibt die Gerade p'_5 in ε' das Strahlenbüschel P'_5 , so beschreibt die Gerade p'_7 ein zu diesem projektives Strahlenbüschel mit dem Scheitel P'_7 . Das Erzeugnis der beiden Strahlenbüschel ist demnach ein Kegelschnitt k , der durch die Punkte P'_5 und P'_7 hindurchgeht.

Bei jeder zu den sieben Paaren konjugierter Punkte (P_i, P'_i) , $(i = 1, \dots, 7)$ gehörenden *ausgearteten* Korrelation zwischen den Ebenen ε und ε' müssen nun die den

Punkten P_5, P_6, P_7 von ε bzw. korrelativ entsprechenden Geraden p'_5, p'_6, p'_7 von ε' durch den dieser Ebene angehörigen singulären Punkt der Korrelation hindurchgehen. Dieser Punkt muss demnach jedem der beiden Kegelschnitte l und k angehören und daher in einen der drei von P'_5 verschiedenen Schnittpunkte dieser beiden Kegelschnitte fallen.

Ist umgekehrt S' einer dieser drei Schnittpunkte, so ist in der entsprechenden Korrelation zwischen den Ebenen ε und ε' dem Punkt S' von ε' jeder der drei Punkte P_5, P_6, P_7 , die der Voraussetzung nach nicht in einer Geraden liegen, in ε konjugiert. Die Korrelation ist also ausgeartet, und S' ist der der Ebene ε' angehörende singuläre Punkt.

Zu sieben Paaren konjugierter Punkte gibt es also *drei* ausgeartete Korrelationen, und durch sie sind in der bereits angegebenen Weise die *drei Lösungen* des *Problems der Projektivität* gegeben. (Schluss folgt im nächsten Heft.) L. HOFMANN, Wien

Zu einem Satz von P. Erdős

R_1, R_2, R_3 und r_1, r_2, r_3 seien die Abstände der Ecken bzw. Seiten eines Dreiecks von einem beliebigen inneren Punkt O des Dreiecks. Von P. ERDÖS stammt die Ungleichung¹⁾ (S. 12)

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3), \quad (1)$$

in der Gleichheit nur für ein reguläres Dreieck mit dem Mittelpunkt O gilt.

Hier wird allgemeiner für beliebiges k bewiesen ($M_k = k$ -tes Potenzmittel):

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_k(R_1, R_2, R_3)}{M_k(r_1, r_2, r_3)} &\geq 2 && \text{für } |k| \leq 1, \\ &> 2^{1/|k|} && \text{für } |k| > 1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Diese Schranken sind genau; Gleichheit kann nur im ersten Fall bestehen und auch dann nur für ein gleichseitiges Dreieck mit dem Mittelpunkt O .

Offenbar genügt es, den Beweis für $k > 0$ zu liefern. Für negative k ergibt sich das Resultat durch Anwendung der Polarität bezüglich des Einheitskreises um O auf das Dreieck. Für $k = 0$ ($M_0 =$ geometrisches Mittel) erhält man einen Spezialfall eines für beliebige konvexe Polygone bewiesenen Satzes¹⁾ (S. 33).

Wir verwenden den von FEJES TÓTH¹⁾ (S. 13) dargestellten, von MORDELL herührenden Beweis des Satzes von ERDÖS. Dort wird gezeigt

$$R_1 \geq \frac{r_2 \sin \gamma + r_3 \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Daraus folgt aber wegen der Konkavität von $f(x) = x^k$ für $0 < k \leq 1$

$$R_1^k \geq \frac{2^{k-1}}{\sin^k \alpha} (r_2^k \sin^k \gamma + r_3^k \sin^k \beta)$$

¹⁾ L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin 1953)