Überraschende Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Autor(en): **Buchner, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **13 (1958)**

Heft 4

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-19776

und man hat

$$r_{k+1} = 3\,r_k \quad \text{für } 3\,r_k < 2^{k+1}, \qquad r_{k+1} = 3\,r_k - 2^{k+1} \quad \text{für } 3\,r_k > 2^{k+1}.$$

Wir setzen jetzt

$$\delta_k = 1 - \frac{r_k}{2^k} = x_k - \frac{3^k}{2^k}, \qquad 0 < \delta_k < 1.$$

Nach dem Lemma ist

$$\delta_{k+1} = \frac{3}{2}\,\delta_k - \frac{\varepsilon+1}{2}, \qquad \varepsilon = -2,\ -1,\ 0,\ 1. \tag{5}$$

Im Intervall (3) liegt dann und nur dann eine ganze Zahl x_k, wenn $\lambda_k \leqq \delta_k$. Wir nehmen jetzt an, dass für $k > k_0 > 400$ stets $\delta_k < \lambda_k$ gilt, dass also (2) nur für endlich viele k richtig ist. Insbesondere hat man dann für alle $k > k_0$ die grobe Abschätzung $\delta_k < 1/3$, die wegen $\delta_{k+1} > 0$ zur Folge hat, dass in (5) nur $\varepsilon = -2$ und $\varepsilon = -1$ möglich sind. Für δ_{k+1} kommen also nur die Werte

$$\frac{3}{2}\,\delta_k \qquad \text{oder } \frac{3}{2}\,\delta_k + \frac{1}{2}$$

in Frage, und man hat also für $k > k_0$ und $i \geqq 1$

$$\delta_{k+1} \geqq \frac{3}{2}\,\delta_k, \qquad \delta_{k+i} \geqq \left(\frac{3}{2}\right)^i \delta_k.$$

Bestimmt man i so, dass

$$\left(\frac{3}{2}\right)^i \geqq \frac{\lambda_k}{\delta_k} > 1,$$

dann ist aber

$$\delta_{k+i} \geqq \left(\frac{3}{2}\right)^i \delta_k \geqq \lambda_k > \lambda_{k+i}$$

im Widerspruch zu unserer Annahme. E. Trost

Überraschende Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wird eine symmetrische Münze $2n$-mal geworfen, so hat unter allen möglichen Ergebnissen die Gleichverteilung mit n-mal Kopf und n-mal Schrift die grösste Wahrscheinlichkeit. Sind 200 Kugeln auf 20 Fächer zu verteilen, dann kommt der Gleichverteilung mit 10 Kugeln pro Fach die grösste Wahrscheinlichkeit zu. Zieht man aus einer Urne, welche die Nummern 1–100 enthält, zehn Nummern, so verteilen sie sich mit der grössten Wahrscheinlichkeit auf die zehn Zehner. Beim Jass wird man mit der grössten Wahrscheinlichkeit zwei Karten einer bestimmten Sorte erwarten dürfen. Immer kommt der Gleichverteilung die grösste Wahrscheinlichkeit zu.

Peter und Paul werfen mit einer Münze und wetten um die Geldeinheit. Peter setzt auf Kopf, und sein gesamter Gewinn bzw. Verlust bis und mit dem n-ten Spiel werde mit S_n bezeichnet und dementsprechend der Gewinn von Paul mit $-S_n$. Um die drei Fälle $S_n \gtreqless 0$ auf zwei zu reduzieren, sagen wir, ein Spieler «führe», wenn $S_n > 0$ ist, oder wenn $S_n = 0$ und $S_{n-1} > 0$ sind. Ein Wechsel in der Führung tritt somit nur ein, wenn S_n sein Vorzeichen wechselt. S_n kann nur verschwinden, wenn n eine gerade Zahl ist. Wurde $2n$-mal gespielt, dann konnte Peter während $0, 2, 4, \ldots, 2n$ Spielen führen. Welcher Zahl kommt nun die grösste Wahrscheinlichkeit zu? Unsere Intuition sagt uns, dass es am wahrscheinlichsten sein wird, wenn Peter und Paul je während n Spielen führen. Dem ist aber ganz und gar nicht so, im Gegenteil kommt dieser Möglichkeit die kleinste Wahrscheinlichkeit zu, und überraschenderweise ist am wahrscheinlichsten, dass einer der beiden Spieler während aller $2n$ Spiele führt, selbst wenn n über alle Grenzen wächst.

Tabelle 1

				S_n			
K	KK	KKK	KKKK	1	2	3	4
			KKKS	1	2	3	2
		KKS	KKSK	1	2	1	2
			KKSS	1	2	1	0
	KS	KSK	KSKK	1	0	1	2
			KSKS	1	0	1	0
		KSS	KSSK	1	0	−1	0
			KSSS	1	0	−1	−2

Dieses Resultat lässt sich schon an dem bescheidenen Material von vier Spielen ablesen, wobei in Tabelle 1 der Symmetrie wegen nur die Hälfte der möglichen Spiele angeführt wird. Von den 16 Spielen führen Peter und Paul je deren 6, und bei vier Spielen wechseln sie in der Führung ab. Die Wahrscheinlichkeit, dass entweder Peter oder Paul während des ganzen Spieles führt, beträgt 0,75, und 0,25 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie sich in die Führung teilen. Dieses Ergebnis kann man von Schülern leicht auch an einem etwas grösseren Zahlenmaterial nachprüfen lassen.

Mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen ist es nicht schwierig, lediglich weitläufig, die Formel für den allgemeinen Fall herzuleiten. Wir verweisen dafür auf die Literatur[1]). Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter während genau $2r$ von $2n$ Spielen führt, ist

$$w_{2r,\,2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r}.$$

[1]) Kai Lai Chung und W. Feller, *On Fluctuations in Coin-tossing*, Proc. nat. Acad. Sci., Wash. *35*, 605 (1949).
William Feller, *Fluctuation Theory of Recurrent Events*, Trans. Amer. math. Soc. *67*, 98 (1949).
William Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Band 1 (John Wiley & Sons, New York 1950).

Für grosse Werte von n und r gelten die asymptotischen Formeln

$$w_{2r,2n} = \frac{1}{\pi\sqrt{r(n-r)}}, \qquad \text{wenn } 0 < r < n \text{ und } w_{0,2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \tag{1}$$

In der Tabelle 2 sind die Werte für $2n = 20$ Spiele aufgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter nie oder immer führt, ist danach je 0,1762, während die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er während 10 von 20 Spielen führt, nur 0,0606 beträgt. Bei $2n = 2 \cdot 10^6$ Spielen hat die Wahrscheinlichkeit, dass Peter dauernd führt, den Wert 0,000564, und 0,000000637 ist die Wahrscheinlichkeit, dass er nur während 10^6 Spielen in Führung liegt.

Tabelle 2

$2r$	$w_{2r,20}$
0 20	0,1762
2 18	0,0927
4 16	0,0736
6 14	0,0655
8 12	0,0617
10	0,0606

$t = r/n$ kann als der zeitliche Anteil bezeichnet werden, währenddessen Peter führt. Die Wahrscheinlichkeit, dass $0 < a < t < b < 1$ ist, beträgt für grosses n und r

$$w(a,b) = \frac{1}{\pi} \sum_{an<r<bn} \frac{1}{n\sqrt{\frac{r}{n}\left(1-\frac{r}{n}\right)}} \sim \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{b} - \arcsin\sqrt{a}\right).$$

Für $a = 0$ kann die Approximationsformel (1) nicht mehr verwendet werden. Jedoch ergibt die unbestimmte Integration

$$w(0,t) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t} + c.$$

Infolge der Symmetrie muss $w(0, 1/2) = 0{,}5$ sein, und daher ist $c = 0$, das heisst, für die Wahrscheinlichkeit, dass $r/n < t$ ist, gilt das Arcussinus-Gesetz[2])

$$w\left(\frac{r}{n} < t\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t} \qquad \text{(siehe Figur).}$$

Wird während eines Jahres ununterbrochen gespielt und beansprucht jedes Spiel eine Sekunde, so kommt es immerhin einmal unter 16 derartigen Jahresspielen vor, dass einer der Spieler während 364 Tagen führt und der andere nur während eines Tages. Unheimlich lange Glücksserien bzw. Pechsträhnen sind demnach keineswegs selten.

Unser Beispiel birgt aber noch eine weitere Überraschung. Betrachten wir jetzt nur jene Serien, die nach $2n$ Spielen mit Gleichstand $S_{2n} = 0$ endigen. Wie gross ist nun unter dieser Voraussetzung die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Peter während $0, 2, 4, \ldots, 2n$ Spielen führt? Für welche Zahl von Spielen $2k$ nimmt die Wahrscheinlichkeit Extremwerte an? Betrachtet man nur die Serien, bei denen Gewinn und Verlust sich die Waage halten, dann haben alle $n+1$ Möglichkeiten, dass Peter

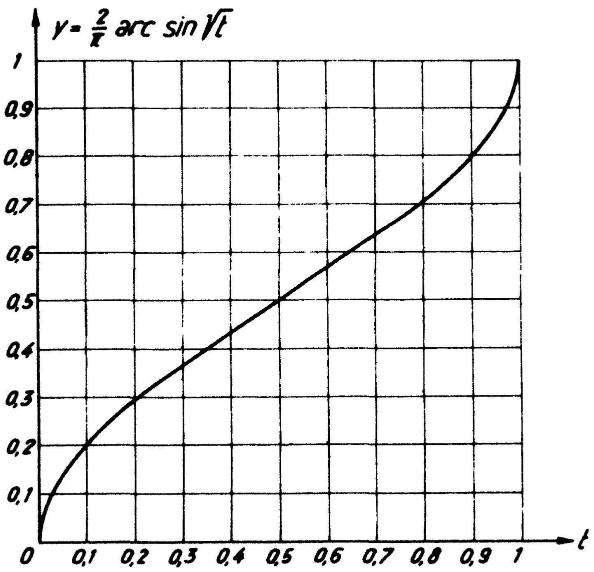
[2]) PAUL LÉVY, *Sur certains processus stochastiques homogènes*, Compos. math. 7, 283 (1939).

in 0, 2, 4, ..., $2n$ Partien führt, dieselbe Wahrscheinlichkeit $w = 1/(n+1)$. Aus der Tabelle 1 erkennt man, dass für $2n = 4$ Spiele insgesamt 6 Serien mit Gleichstand endigen, und dabei ist die Wahrscheinlichkeit je 1/3, dass Peter in 0, 2, 4 Spielen führt.

Betrachtet man nicht nur das eine Spiel zwischen Peter und Paul, sondern zugleich k derartige Partien, die alle so lange fortgesetzt werden, bis erstmals Gleichstand eintritt. Es bezeichne x_s ($s = 1, \ldots, k$) die Zahl der Spiele, die bei der s-ten Partie notwendig sind, bis erstmals Gleichstand erreicht wird. Überraschenderweise nähert sich der Mittelwert

$$M_k = \frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}$$

keinem bestimmten Wert, sondern wächst mit k über alle Grenzen, und zwar ist M_k



selbst von der Grössenordnung k. Die Wahrscheinlichkeit, dass $M_k \leqq a^2 k$, wo a eine beliebige positive Konstante bedeutet, ist

$$w\,(M \leqq a^2 k) \approx 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1/a} e^{-x^2/2}\,dx\right),$$

wobei die Differenz der beiden Seiten mit $n \to \infty$ gegen Null strebt.

Bei $k = 10$ gleichzeitigen Partien ist es ebenso wahrscheinlich, dass die Zahl der Spiele einer Partie, bis Gleichstand eintritt, 22 überschreitet oder unterschreitet. Bei $k = 100$ Partien wird die Zahl der Spiele einer Partie mit gleicher Wahrscheinlichkeit 220 über- wie unterschreiten. Bei einer grossen Zahl von Partien wird es immer einige geben, die besonders lange dauern und dadurch einen hohen Mittelwert erzeugen. Es zeigt dieses Beispiel die Gefahr, die in der verbreiteten Usanz liegt, weitabliegende Beobachtungswerte aus der Statistik auszuschliessen. Durch dieses Verfahren erhält man einen endlichen Mittelwert, obwohl dieser vielleicht unendlich ist.

P. BUCHNER