

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1959)
Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Nach Induktionsannahme lässt sich entwickeln:

$$A_{i,k} = \sum_{p < k} (-1)^{1+p} a_{1p} B_{i1, kp} - \sum_{p > k} (-1)^{1+p} a_{1p} B_{i1, kp}.$$

Die $B_{i1, kp}$ bedeuten offenbar Determinanten von Matrizen $(n-2)$ -ter Ordnung, denen die Zeilen $i, 1$ und die Spalten k, p der ursprünglichen Matrix fehlen. Der Vorzeichenwechsel im zweiten Summanden rechts kommt dadurch zustande, dass sich infolge der fehlenden k -ten Spalte das «Schachbrettmuster» daselbst um ein Vorzeichen verschiebt.

Analog gilt

$$A_{1,p} = - \sum_{k < p} (-1)^{i+k} a_{ik} B_{1i, pk} + \sum_{k > p} (-1)^{i+k} a_{ik} B_{1i, pk}.$$

Man setze nun die beiden Entwicklungen in (*) ein und bestimme sowohl links als auch rechts den Koeffizienten eines festen B , zum Beispiel von $B_{i1, rs} = B_{1i, sr}$ ($r < s$). Er ergibt sich auf beiden Seiten übereinstimmend zu

$$(-1)^{1+i+r+s} (a_{1r} a_{is} - a_{ir} a_{1s}).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen und die Definition der Determinante vollzogen. Ganz genau gleich lässt sich zeigen, dass auch die analoge Entwicklung nach einer der Spalten stets auf dasselbe Resultat führt.

Bei den Beweisen zweier wichtiger Sätze der elementaren Determinantenlehre wird meistens bis auf die Definition zurückgegangen: beim Laplaceschen Entwicklungssatz und beim Multiplikationssatz. Es seien deshalb ihre Beweise im Rahmen der hier gegebenen Definition kurz beschrieben.

Der Laplacesche Entwicklungssatz (Entwicklung einer Determinante nach k Reihen) lässt sich mit derselben Methode beweisen wie sein soeben behandelter Spezialfall $k = 1$ (bei dessen Beweis übrigens der Fall $k = 2$ miterledigt wurde). Soll man etwa für eine Determinante n -ter Ordnung die Entwicklung nach $k + 1$ gegebenen Zeilen nachweisen, so entwickle man sie zuerst nach der untersten dieser Zeilen. Die dabei auftretenden Determinanten $(n-1)$ -ter Ordnung können dann auf Grund einer Induktionsannahme nach den restlichen k Zeilen entwickelt werden. Dadurch kommen Minoren $(n-k-1)$ -ter Ordnung ins Spiel; deren Koeffizienten in der Gesamtentwicklung lassen sich – wieder unter Beachtung des «Schachbrettmusters» mit dem Sprung bei der fehlenden Spalte – leicht ermitteln und ergeben sich gemäss dem Laplaceschen Satze.

Der Multiplikationssatz erfordert ein etwas anderes Vorgehen. Gestützt auf die Entwicklungsformeln, lässt sich wie üblich das Verhalten der Determinante bei elementaren Umformungen der Matrix (Vertauschung und Linearkombination von Reihen) angeben. Der Matrizenrechnung entnimmt man nun den

Satz: Jede Matrix lässt sich durch geeignete Vertauschung ihrer Spalten und Linearkombination ihrer Zeilen entweder in eine Matrix mit mindestens einer, aus lauter Nullen bestehenden Zeile oder in eine Diagonalmatrix mit von Null verschiedenen Diagonalgliedern überführen. Ihre Determinante wechselt dabei höchstens das Vorzeichen.

Ist nun ein Matrizenprodukt $AB = C$ gegeben, so wende man das Verfahren des soeben formulierten Satzes auf A an, wobei die nötigen Vertauschungen der Spalten von A durch entsprechende Vertauschungen der Zeilen von B kompensiert werden. Entstehen dadurch die Matrizen A' und B' mit dem Produkt $A'B' = C'$, so sieht man leicht ein, dass $\det C' = \det C$. Der Multiplikationssatz der Determinantenlehre folgt nun unmittelbar aus der Form von A' und den Entwicklungsformeln. P. WILKER, Bern

Aufgaben

Aufgabe 313. Man suche jene zu einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel h konzentrischen Ellipsen e , die durch das Polarsystem von h in sich übergehen. Charakterisiere eine solche Ellipse e ; zeige ferner, dass die genannten Ellipsen eine einparametrische Mannigfaltigkeit bilden, und bestimme ihr Hüllgebilde. R. BEREIS und H. BRAUNER, Wien

Lösung der Aufgabensteller: Ist P_1 einer der vier Schnittpunkte der gegebenen gleichseitigen Hyperbel h mit der Mitte M mit einer konzentrischen Lösungsellipse e , so muss die Hyperbeltangente t_1 in P_1 (als Polare von P_1 bez. h) die Ellipse e berühren, was naturgemäss nur in P_1 selbst möglich ist. e und h berühren einander daher in dem gemeinsamen Punkt P_1 . Dies gilt für jeden der gemeinsamen Punkte von e und h , e berührt somit h doppelt, und zwar zufolge der konzentrischen Lage in den Endpunkten des gemeinsamen Durchmessers P_1P_2 . In jenem Parallelogramm, dessen Diagonalen auf den Asymptoten von h liegen und das die Hyperbeltangenten t_1, t_2 in P_1, P_2 als Gegenseiten besitzt, liegen die Restgegenseiten auf Grund elementarer Hyperbeleigenschaften bezüglich h konjugiert. Die Mittelpunkte Q_1, Q_2 dieser Seiten gehören daher der Ellipse e an, da die Polare von Q_1 bezüglich h die Gegenseite des Parallelogramms durch Q_2 ist. P_1P_2 und Q_1Q_2 sind also konjugierte Durchmesser von e . Ist T_1 der Schnittpunkt von t_1 mit einer Asymptote von h , so gilt, da h gleichseitig ist, $MP_1 = P_1T_1$. Die gemeinsamen konjugierten Durchmesser von e und h sind daher gleich lang und gegen die Asymptoten von h gleich geneigt; diese Asymptoten tragen die Achsen von e . Aus Symmetriegründen berührt e die zu h konjugierte (gleichseitige) Hyperbel doppelt, und zwar in Q_1 und Q_2 .

Zu jedem Durchmesser P_1P_2 von h gehört eine Lösungsellipse e ; alle Ellipsen e bilden daher eine einparametrische Mannigfaltigkeit, deren Hüllgebilde aus der gegebenen Hyperbel h und ihrer konjugierten besteht.

Zusammenfassend gilt: Jede zu einer gleichseitigen Hyperbel h konzentrische autopolare Ellipse e berührt h und die zu h konjugierte Hyperbel in den Endpunkten gleich langer konjugierter Durchmesser; ihre Achsen liegen auf den Asymptoten von h . Die Einhüllende aller Lösungsellipsen besteht aus der Hyperbel h und ihrer konjugierten.

2. *Lösung:* Die Gleichung der Hyperbel h sei

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

diejenige der Ellipse e

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = a^2.$$

Die Bedingung dafür, dass die Polare $x x_1 - y y_1 = a^2$ von P_1 in bezug auf h die Ellipse e berührt, lautet

$$\gamma x_1^2 + 2\beta x_1 y_1 + \alpha y_1^2 = a^2 (\alpha \gamma - \beta^2).$$

Soll die Bedingung erfüllt sein, sobald P_1 auf e liegt, so muss $\alpha \gamma - \beta^2 = 1$ und $\alpha = \gamma$ sein, und e gehört zur Schar der Ellipsen

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha y^2 = a^2 \text{ mit } \alpha^2 - \beta^2 = 1.$$

Alle Ellipsen haben die Asymptoten von h zu Achsen, sie berühren h und (aus Symmetriegründen) die zu h konjugierte Hyperbel. Sie haben alle dieselbe Fläche πa^2 .

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 314. Man beweise: Ist n eine natürliche Zahl, $6n + 1$ eine Primzahl und (a/b) das Legendresche Symbol, so gilt

$$\sum_{k=1}^{6n} \left(\frac{k^3 + 1}{6n + 1} \right) \equiv -1 - \binom{3n}{n} \pmod{6n + 1}.$$

J. PIEHLER, Leuna

Lösung des Aufgabenstellers: Die Anwendung des Eulerschen Kriteriums für quadratische Reste ergibt

$$\sum_{k=1}^{6n} \left(\frac{k^3 + 1}{6n + 1} \right) \equiv \sum_{k=1}^{6n} (k^3 + 1)^{3n} \equiv \sum_{k=1}^{6n} \sum_{i=0}^{3n} \binom{3n}{i} k^{3i} \equiv \sum_{i=0}^{3n} \binom{3n}{i} \sum_{k=1}^{6n} k^{3i} \pmod{6n + 1}. (*)$$

Ist s_i ($i = 1, 2, \dots, 6n$) die i -te elementarsymmetrische Funktion der natürlichen Zahlen von 1 bis $6n$, so gilt für $t = 1, 2, \dots, 6n$

$$\sum_{k=1}^{6n} k^t = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 2 s_2 & s_1 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 3 s_3 & s_2 & s_1 & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t s_t & s_{t-1} & s_{t-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Wegen den mod $6n + 1$ geltenden Kongruenzen

$$s_1 \equiv s_2 \equiv \dots \equiv s_{6n-1} \equiv 0, \quad s_{6n} \equiv -1, \quad k^{6n} \equiv 1$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{6n} k^t \equiv \begin{cases} 0 \pmod{6n+1} & \text{für } t \equiv 1, 2, \dots, 6n-1 \pmod{6n}. \\ 6n \pmod{6n+1} & \text{für } t \equiv 0 \pmod{6n}. \end{cases}$$

Einsetzen dieser Ergebnisse in (*) liefert die Behauptung.

Eine weitere Lösung sandte L. CARLITZ, Durham, N. C. (USA).

Aufgabe 315. *Mittelwertsatz der Integralrechnung und die drei elementaren Mittelwerte.* Es sei $f(x)$ definiert (und integrierbar) im Intervall (a, b) . Man nehme an, dass in jedem Teilintervall (u, v) von (a, b)

$$\int_u^v f(x) dx = M(v - u),$$

wo

$$M = \frac{f(u) + f(v)}{2}. \quad (1)$$

Man beweise, dass dies dann und nur dann gültig ist, wenn $f(x)$ eine lineare Funktion ist: $f(x) = kx + r$ mit konstanten k und r .

Man nehme an, dass $f(x)$ in (a, b) nur positive Werte annimmt, und beweise, dass die Beziehung

$$M = [f(u)f(v)]^{1/2} \quad (2)$$

dann und nur dann im obigen Umfang gültig ist, wenn

$$f(x) = (kx + r)^{-2},$$

und dass

$$M = \frac{2f(u)f(v)}{f(u) + f(v)} \quad (3)$$

dann und nur dann analogerweise gültig ist, wenn

$$f(x) = (kx + r)^{-1/2}.$$

G. PÓLYA, Palo Alto (California, USA)

Lösung des Aufgabenstellers: Wenn $a < x < b$, so ist

$$\int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Man setze $f(a) = A$, $f(b) = B$ und $f(x) = X$, dann folgt aus (1), (2) und (3) beziehungsweise

$$(X + A)(x - a) + (B + X)(b - x) = (B + A)(b - a)$$

oder

$$f(x) = X = \frac{(b-x)A + (x-a)B}{b-a}; \quad (1')$$

$$(XA)^{1/2}(x-a) + (BX)^{1/2}(b-x) = (BA)^{1/2}(b-a)$$

oder

$$f(x) = X = \left[\frac{(b-a)(AB)^{1/2}}{(x-a)A^{1/2} + (b-x)B^{1/2}} \right]^2; \quad (2')$$

$$\frac{AX}{A+X}(x-a) + \frac{XB}{X+B}(b-x) = \frac{AB}{A+B}(b-a)$$

oder

$$f(x) = X = \left[\frac{1}{A^2} \cdot \frac{b-x}{b-a} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{x-a}{b-a} \right]^{-1/2}. \quad (3')$$

(1'), (2') und (3') zeigen, dass die angegebenen Formen von $f(x)$ für die entsprechenden speziellen Fassungen des Mittelwertsatzes notwendig sind; dass sie auch hinreichend sind, ist leicht zu verifizieren.

H. MEILI (Winterthur) und J. POGÁNY (Budapest) stellen für $f(x)$ drei Differentialgleichungen auf, deren Lösung auf die angegebenen Formen von $f(x)$ führt. L. CARLITZ (Durham, N. C., USA) führt alle drei Fälle auf die Differenzengleichung

$$g(u+h) - 2g(u) + g(u-h) = 0$$

zurück, die die Lösung $g(x) = kx + \pi(x)$ hat, wo k konstant und $\pi(x)$ periodisch in x mit der Periode h ist. Gilt die Differenzengleichung für beliebiges h , so ist $\pi(x)$ konstant.

Aufgabe 316. Man konstruiere in der Ebene drei sich gegenseitig berührende Kreise, von denen je eine Tangente mit Berührungspunkt gegeben ist.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Der geometrische Ort der Berührungspunkte von Kreisen aus zwei parabolischen Büscheln besteht aus zwei Kreisen, die durch die Grundpunkte der Büschel und die Berührungspunkte von Kreisen des einen mit der festen Tangente des andern Büschels gehen. Man verifiziert dies leicht mit Hilfe von Kreiswinkelsätzen. Durchläuft ein Kreis eines der Büschel, so wird je eine projektive Abbildung desselben auf das andere bewirkt, je nachdem der eine oder der andere der beiden berührenden Kreise aus dem zweiten Büschel zugeordnet wird. Dabei bilden die Berührungspunkte auf ihrem Trägerkreis ebenfalls eine dazu projektive Punktreihe. (Man projiziere zum Beweis das Viereck, bestehend aus den Grundpunkten und den Mittelpunkten der einander berührenden Kreise einmal auf die Sekante zwischen den Grundpunkten und einmal auf eine dazu senkrechte Gerade und eliminiere den Winkel der Zentralen mit der Sekante. Es entsteht eine bilineare Beziehung zwischen den Radien einander berührender Kreise der beiden Büschel. Damit sind die projektiven Beziehungen als solche erwiesen.)

Die vorgelegte Aufgabe ist nun der Spezialfall $n = 3$ der allgemeineren, eine «geschlossene Kette» von n einander der Reihe nach berührenden Kreisen der Ebene, von denen je eine Tangente mit Berührungspunkt gegeben sind, zu konstruieren. Sie hat 2^{n+1} Lösungen, die man als «Schliessungs-Aufgabe» wie folgt bestimmt. Man wählt zunächst (auf 2^n Weisen) je einen der Trägerkreise der Berührungspunkte durch aufeinanderfolgende Grundpunkte der durch die gegebenen Elemente bestimmten Kette von parabolischen Kreisbüscheln, beginne sodann mit einem beliebigen Kreis des ersten Büschels, ziehe den ihn berührenden des zweiten und so fort. Der des letzten Büschels beschreibt dann auf dem letzten Trägerkreis (das heisst zwischen dem letzten und ersten Grundpunkt) eine zu der vom Kreis des ersten Büschels beschriebenen projektive Punktreihe. Die zwei Doppelpunkte der so definierten Projektivität auf dem Trägerkreis geben zwei Lösungspaare aus ersten und letzten Kreisen, wobei die Zwischenkreise

vermöge ihrer Berührungspunkte auf den Trägerkreisen konstruiert werden. Wegen der 2ⁿ Systeme von Trägerkreisen und der Doppeldeutigkeit der Aufgabe zweiten Grades ergibt sich die angegebene Zahl von Lösungssystemen. GEORG UNGER, Dornach

Weitere Lösungen sandten J. LANGR (Prag) (2 Lösungen), R. LAUFFER (Graz) und R. WHITEHEAD (Camborne, England).

Aufgabe 317. On considère toutes les coniques bitangentes à deux cercles donnés $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, et ayant la ligne des centres de ces cercles comme axe de symétrie. Dans chacune de ces coniques on mène les cordes qui joignent un point de contact de $\mathfrak{C}_1$ à un point de contact de $\mathfrak{C}_2$. Trouver l'enveloppe de ces droites. A. LOEFFLER, Pully-Rosiaz

Lösung: Die beiden Kreisgleichungen seien

$$x^2 + y^2 + 2 \alpha_i x + \beta = 0, \quad i = 1, 2,$$

wobei die Potenzlinie als y -Achse gewählt wurde. Ein doppelt berührender Kegelschnitt muss sich in den zwei Formen

$$x^2 + y^2 + 2 \alpha_i x + \beta + \lambda_i (x - x_i)^2 = 0$$

darstellen lassen. Aus

$$2 \alpha_1 x + \lambda_1 (x - x_1)^2 \equiv 2 \alpha_2 x + \lambda_2 (x - x_2)^2$$

folgt $\lambda_1 = \lambda_2$ und $x_1 = -x_2$. Ist $y = m x + b$ eine Gerade der gesuchten Enveloppe, so gelten für die Abszissen ihrer Schnittpunkte mit $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ die Gleichungen

$$x^2 + (m x + b)^2 + 2 \alpha_1 x + \beta = 0, \quad x^2 + (m x + b)^2 + 2 \alpha_2 x + \beta = 0.$$

Die erste von diesen Gleichungen muss nun mit der aus der zweiten Gleichung durch Vorzeichenwechsel von x entstehenden Gleichung

$$x^2 + (-m x + b)^2 - 2 \alpha_2 x + \beta = 0$$

eine gemeinsame Wurzel haben, denn wegen $x_1 = -x_2$ liegen die Berührungspunkte von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ mit dem doppelt berührenden Kegelschnitt symmetrisch zur y -Achse. Die Bedingung für die Existenz einer gemeinsamen Wurzel ist $2 m b = -(\alpha_1 + \alpha_2)$, da sich die beiden Gleichungen nur im Koeffizienten von x unterscheiden.

Als Enveloppe der Geraden

$$f(x, m) \equiv y - m x + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2 m} = 0$$

erhält man durch Elimination von m aus $f = 0$ und $df/dm = 0$ die Parabel

$$y^2 + 2 (\alpha_1 + \alpha_2) x = 0,$$

die die Potenzlinie der Kreise als Scheiteltangente und den Mittelpunkt der Zentralstrecke als Brennpunkt hat. C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

Eine weitere Lösung legte J. BASILE (Brüssel) vor.

Neue Aufgaben

354. Man beweise, dass ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass zwei primitive binäre quadratische Formen mit ganzrationalen Koeffizienten und gleicher Diskriminante zu derselben Formenklasse im weiteren Sinne gehören, die gleichzeitige Darstellbarkeit einer ungeraden Primzahl ist.

J. PIEHLER, Leuna

355. Put

$$(\operatorname{sech} x)^k = \sum E_{2m}^{(k)} \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Show that for k odd (positive or negative)

$$E_{2m}^{(k)} \equiv (-1)^m (k+1)/2 \pmod{4}. \quad (1)$$

The case $k = 1$ is familiar. Show also that for k even

$$E_{2m}^{(k)} \equiv 0 \pmod{4} \quad (m > 1) \quad (2)$$

L. CARLITZ, Durham N.C. (USA)

356. Man konstruiere ein (im allgemeinen windschiefes) Viereck, das einer gegebenen Kugel einbeschrieben ist und dessen Seiten der Reihe nach durch vier gegebene Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 hindurchgehen. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

357. Gegeben sei ein Dreieck ABC , dessen Winkel alle kleiner sind als 120° . Den Symmetriepunkt O , von dem aus die Dreiecksseiten unter gleichen Winkeln erscheinen, verbinde man mit A, B und C . Die so erhaltenen Transversalen schneiden die Dreiecksseiten in T_1, T_2, T_3 unter den Winkeln $\psi_1 = \angle AT_1C$, $\psi_2 = \angle BT_2A$, $\psi_3 = \angle CT_3B$. Man zeige, dass zwischen diesen Winkeln die Beziehung

$$\cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = 4 \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3$$

besteht.

H. JORDAN, Wiesbaden

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x -Achse nach rechts, y -Achse nach vorn, z -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Bestimme das Volumen des Sechsecks $ABCDE$.

$A(6; 4; 9)$ $B(14; 1; 5)$ $C(11; 8; 0)$ $D(17; 10; 7)$ $E(4; 0; 2)$.

► $V = 219$.

2. Von einer Ellipse kennt man den Mittelpunkt $M(0; 0)$, die Länge der grossen Halbachse $a = 6$ sowie zwei weitere Punkte $A(0; 4)$ und $B(3; -1)$. Zeichne die Ellipse und insbesondere ihre Hauptachsen.

► Deutung der Figur als Normalriss des Grosskreises einer Kugel. Die Hauptachsen der beiden Lösungen bilden mit der x -Achse Winkel von $49^\circ 53'$ und $118^\circ 21'$; die kleinen Halbachsen messen 2,9960 und 2,3456.

3. Gegeben sind zwei Geraden:

$$a \begin{cases} A_1(3; 2; 0), \\ A_2(17; 7; 10), \end{cases} \quad b \begin{cases} B_1(3; -8; 8), \\ B_2(17; 10; 0). \end{cases}$$

Konstruiere eine Gerade t , die a schneidet, parallel b ist, und auf der die Projektionsebenen eine Strecke der Länge 10 ausschneiden. (Auf dem Blatt befindet sich nur eine Lösung der Aufgabe.)

4. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC , dessen Ecken in dieser Reihenfolge auf drei gegebenen Geraden a, b, c liegen, während die Basis AB durch den gegebenen Punkt P geht.

$$a \begin{cases} A_1(9,5; 0; 8), \\ A_2(17,5; 8; 1,5), \end{cases} \quad b \begin{cases} B_1(1; 1,5; 1), \\ B_2(10,5; 13,5; 10,5), \end{cases} \quad c \begin{cases} C_1(1,5; 3,5; 4,5), \\ C_2(15; 10; 13); \end{cases}$$

$$P(10; 3,5; 6).$$

5. Eine Kugel ($R = 4$) mit spiegelnder Oberfläche wird mit 45° -Licht beleuchtet. Konstruiere den «glänzenden Punkt» für den Aufriss, das heisst denjenigen Punkt, in dem der reflektierte Strahl zweitprojizierend ist.

Literaturüberschau

Neue Zeitschrift: *Numerische Mathematik*, Band 1, Heft 1

Herausgegeben von R. SAUER, E. STIEFEL, J. TODD und A. WALTHER

Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1959

In den letzten Jahren wurden die Methoden der angewandten Mathematik sehr stark entwickelt, insbesondere die numerischen Approximationsverfahren. Zum Teil ist dies darauf zurückzuführen, dass heute auch Methoden, welche einen enormen Aufwand an Rechenarbeit mit sich bringen, nicht mehr nutzlos sind, da ja die modernen Rechenautomaten meistens in der Lage sind, den Aufwand tragbar zu gestalten. Die neue Zeitschrift «Numerische Mathematik» wird die Originalarbeiten aus dem Gebiete der numerischen Methoden bringen, wobei vor allem Verfahren dargestellt werden sollen, welche speziell in Hinsicht auf den Einsatz digitaler Rechenautomaten entwickelt wurden. Das vorliegende Heft enthält die folgenden Arbeiten: E. STIEFEL, *Über diskrete und lineare Tschebyscheff-Approximationen* («Ausgleichung» eines überbestimmten linearen Systems, Anwendung auf die Annäherung einer Funktion); ALSTON S. HOUSEHOLDER und F. L. BAUER, *On Certain Methods for Expanding the Characteristical Polynomial*; MORRIS WEISFELD, *Orthogonal Polynomials in Several Variables*; A. J. PERLIS und K. SAMELSON, *Report on the Algorithmic Language ALGOL*. Bei dieser «Sprache» handelt es sich um eine Symbolik, welche gestattet, den Ablauf einer Berechnung (samt Angaben, Voraussetzungen, logischen Entscheidungen und anderem) durch normierte Symbole darzustellen. Einerseits soll so die Beschreibung von der Sprache unabhängig gemacht werden, um allgemein lesbar zu sein; andererseits wird dabei daran gedacht, die Rechenautomaten in Zukunft so zu bauen, dass sie ein derartiges «Programm» selbst «lesen» und verarbeiten können, ohne dass eine vorgängige Umsetzung in den «Maschinencode» nötig wäre.

W. PROKOP

B. W. GNEDENKO und A. J. CHINTSCHIN:

Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

136 Seiten mit 16 Figuren. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955

Das kleine Büchlein gibt eine wirklich interessante, pädagogisch vorzüglich bedachte Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, die über die einfachsten Sätze hinaus auch Beziehungen bringt, die in den üblichen Schuleinführungen fehlen, so zum Beispiel die Formel von BAYES. Der erste Teil bringt unter dem Titel *Wahrscheinlichkeiten* in sechs Kapiteln die Grundlagen bis zum Bernoullischen Satze. Der zweite Teil über *Zufallsgrößen* behandelt Mittelwerte, Streuung, das Gesetz der grossen Zahlen und normale Verteilungen, ohne Integralrechnung zu benützen. Wenn dabei trotzdem die wesentlichen Gedanken zur Sprache kommen, ist dies dem Umstand zu verdanken, dass die Autoren ihre Einführung aus einer umfassenden Übersicht heraus geschrieben haben. Besonders vermerkt darf werden, dass im ganzen Büchlein weder vom Würfeln noch vom Ziehen aus einer Urne die Rede ist, ein gewiss aussergewöhnlicher, aber nicht unerwünschter Umstand.

Zum Pädagogischen haben wir nur eine einzige Bemerkung zu machen: Die relative Häufigkeit einer Massenerscheinung wird als Wahrscheinlichkeit bezeichnet, natürlich