Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1962)
Heft: 2

Artikel: Sur une propriété des nombres triangulaires
Autor: Sierpiski, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21906

Sur une propriété des nombres triangulaires

Le but de cette note est de donner une démonstration courte et simple de la proposition qu'*il existe une infinité des paires de nombres triangulaires dont la somme ainsi que la différence sont des nombres triangulaires.*

Je démontrerai notamment qu'il existe une infinité de systèmes des nombres naturels x et y satisfaisants aux équations:

$$t_x + t_{2y} = t_{3y} \quad \text{et} \quad t_x - t_{2y} = t_{y-1} \quad \left(\text{où } t_n = \frac{n(n+1)}{2}\right). \tag{1}$$

On vérifie sans peine que chacune des deux équations (1) est équivalente à l'équation

$$x^2 + x = 5\,y^2 + y\,. \tag{2}$$

Il suffira donc de démontrer que l'équation (2) admet une infinité de solutions en nombres naturels x et y.

Il résulte tout de suite de l'identité

$$(161\,x + 360\,y + 116)^2 + 161\,x + 360\,y + 116 - 5(72\,x + 161\,y + 52)^2 -$$
$$- (72\,x + 161\,y + 52) = x^2 + x - 5\,y^2 - y$$

que si x, y est une solution de l'équation (2) en nombres naturels x et y, les nombres $u = 161\,x + 360\,y + 116$ et $v = 72\,x + 161\,y + 52$ présentent aussi une solution de l'équation (2) en nombres naturels plus grands respectivement que x et y. Les nombres $x = 2$ et $y = 1$ donnant évidemment une solution de l'équation (2), il en résulte tout de suite que cette équation a une infinité de solutions en nombres naturels x et y. Notre assertion se trouve ainsi démontrée.

En s'appuyant sur les résultats publiés dans l'Intermédiaire des Mathématiciens *12* (1905), p. 207 par P. F. Teilhet, M. J. Browkin donne dans le journal Wiadomosci Matematyczne Ser. II, 2 (1957–59), p. 253–255 une méthode de trouver toutes les paires des nombres triangulaires non nuls dont la somme ainsi que la différence sont des nombres triangulaires. Il donne aussi toutes telles paires de nombres triangulaires dont l'indice est < 500.

On a, par exemple

$$t_6 + t_5 = t_8\,, \qquad t_6 - t_5 = t_3$$

$$t_{18} + t_{14} = t_{23}\,, \qquad t_{18} - t_{14} = t_{11}\,.$$

Quant à l'équation (2) on peut démontrer que toutes ses solutions en entiers $\geqslant 0$ sont contenues dans la suite infinie

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \ldots,$$

où $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ et, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$x_{k+2} = 161\,x_k + 360\,y_k + 116\,, \qquad y_{k+2} = 72\,x_k + 161\,y_k + 52\,.$$

W. Sierpiński (Varsovie)