Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1962)
Heft: 2

Artikel: Sur une propriété des nombres tétraédraux
Autor: Sierpiski, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21907

Sur une propriété des nombres tétraédraux

On appelle *tétraédral* (ou *pyramidal*) tout nombre de la forme

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{6},$$

où n est un entier positif.

Le but de cette note est de donner une démonstration élémentaire de la proposition suivante:

Théorème. *Il existe une infinité des paires de nombres tétraédraux distincts dont la somme est un nombre tétraédral.*

Démonstration. Définissons les suites infinies d'entiers positifs a_n et b_n ($n = 1, 2, \ldots$) par les conditions

$$a_1 = 9,\ b_1 = 4,\ a_{n+1} = 161\, a_n + 360\, b_n,\ b_{n+1} = 72\, a_n + 161\, b_n \tag{1}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$.

Il résulte sans peine de (1) par l'induction que

$$\text{les nombres } a_n\ (n = 1, 2, \ldots) \text{ sont divisibles par } 9, \tag{2}$$

$$3\, b_n > a_n \text{ pour } n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$a_{n+1} > a_n,\quad b_{n+1} > b_n \text{ pour } n = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

On vérifie sans peine l'identité

$$(161a + 360b)^2 - 5(72a + 161b)^2 = a^2 - 5b^2,$$

d'après laquelle il résulte de (1) que

$$a_{n+1}^2 - 5\, b_{n+1}^2 = a_n^2 - 5\, b_n^2 \text{ pour } n = 1, 2, \ldots,$$

et comme $a_1^2 - 5\, b_1^2 = 9^2 - 5 \cdot 4^2 = 1$, il en résulte par l'induction que

$$a_n^2 - 5\, b_n^2 = 1 \text{ pour } n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Posons maintenant

$$u_n = 3\, b_n + \frac{a_n}{3},\quad v_n = 3\, b_n - \frac{a_n}{3},\quad w_n = 4\, b_n \text{ pour } n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

D'après (2) et (3) les nombres (6) seront des entiers > 1 et, d'après (4) on aura

$$u_{n+1} > u_n \text{ pour } n = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

D'après (6) on vérifie sans peine qu'on a pour $n = 1, 2, \ldots$:

$$u_n^3 + v_n^3 - w_n^3 - u_n - v_n + w_n = (u_n + v_n)(u_n^2 - u_n v_n + v_n^2 - 1) - w_n^3 + w_n =$$
$$= 2\, b_n (a_n^2 - 5\, b_n^2 - 1),$$

d'où, d'après (5), on trouve $u_n^3 + v_n^3 - w_n^3 - u_n - v_n + w_n = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, d'où:

$$\frac{u_n^3 - u_n}{6} + \frac{v_n^3 - v_n}{6} = \frac{w_n^3 - w_n}{6},$$

donc

$$T_{u_n - 1} + T_{v_n - 1} = T_{w_n - 1} \text{ pour } n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

D'après (6) on a $u_n > v_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, donc $T_{u_n-1} > T_{v_n-1}$, et, d'après (7), les nombres $u_n - 1$ peuvent être aussi grands que l'on veut. La formule (8) prouve donc que notre théorème est vrai.

On a, par exemple,

$$u_1 = 3\,b_1 + \frac{a_1}{3} = 3\cdot 4 + 3 = 15, \quad v_1 = 3\,b_1 - \frac{a_1}{3} = 3\cdot 4 - 3 = 9\,, \quad w_1 = 4\,b_1 = 16\,,$$

donc, d'après (8): $T_{14} + T_8 = T_{15}$.

Or, les formules (8) ne donnent pas toutes les solutions de l'équation $T_x + T_y = T_z$ en nombres naturels x, y, z, puisqu'on a, par exemple:

$$T_{54} + T_{20} = T_{55}\,, \quad T_{118} + T_{34} = T_{119}\,, \quad T_{138} + T_{38} = T_{140}\,.$$

Il est à remarquer qu'il existe une paire des nombres tétraédraux égaux, dont la somme est un nombre tétraédral, puisque $T_3 + T_3 = T_4$. Je ne sais pas s'il existe d'autres telles paires. Or, il résulte facilement d'un théorème de M. A. Thue, publié dans Det Kong. Norske Vid. Selskab Skrifter 1911, Nr. 3, que l'équation $2\,T_x = T_y$ n'a qu'un nombre fini de solution en nombres naturels x et y.

Il résulte tout de suite de notre théorème qu'*il existe une infinité des paires de nombres tétraédraux distincts dont la différence est un nombre tétraédral.* Par exemple $T_{15} - T_{14} = T_8$.

Or, je ne connais aucune paire des nombres tétraédraux distincts dont la somme ainsi que la différence seraient des nombres tétraédraux. W. Sierpiński (Varsovie)

Dichteste Kreispackungen auf einem Zylinder

Gewisse Pflanzenformationen, wie zum Beispiel der Maiskolben, legen die Frage der dichtesten Kreispackung auf einem Zylinder nahe: wieviele aus Papier ausgeschnittene Kreisscheiben vom Durchmesser 1 lassen sich auf den Mantel eines vorgegebenen, «sehr langen» Zylinders ohne gegenseitige Überdeckung aufkleben?

Betrachten wir den einfachen Fall, in dem der Umfang U des Zylinders eine natürliche Zahl $U = n$ ist. Dann können wir n Kreise in gleicher Höhe so anbringen, dass der erste Kreis den zweiten, der zweite den dritten, ..., der n-te den ersten berührt. Es entsteht ein «Kreisring». Aus solchen Kreisringen lässt sich eine dichteste regelmässige[1]) Kreislagerung aufbauen, in der die Berührungspunkte der Kreise jede Kreislinie in sechs Teilbögen zerlegen[2]). Die Dichte dieser Kreispackung beträgt

[1]) Die Regularität bedeutet, dass sich jeder Kreis in jeden anderen durch eine Deckbewegung der Lagerung überführen lässt.

[2]) Im Falle $n > 1$ lässt sich diese Kreispackung einfacher kennzeichnen: jeder Kreis wird von sechs anderen berührt.