

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 17 (1962)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Dichteste Kreispackungen auf einem Zylinder  
**Autor:** Fejes Tóth, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21908>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

d'où, d'après (5), on trouve  $u_n^3 + v_n^3 - w_n^3 - u_n - v_n + w_n = 0$  pour  $n = 1, 2, \dots$ , d'où :

$$\frac{u_n^3 - u_n}{6} + \frac{v_n^3 - v_n}{6} = \frac{w_n^3 - w_n}{6},$$

donc

$$T_{u_n-1} + T_{v_n-1} = T_{w_n-1} \text{ pour } n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

D'après (6) on a  $u_n > v_n$  pour  $n = 1, 2, \dots$ , donc  $T_{u_n-1} > T_{v_n-1}$ , et, d'après (7), les nombres  $u_n - 1$  peuvent être aussi grands que l'on veut. La formule (8) prouve donc que notre théorème est vrai.

On a, par exemple,

$$u_1 = 3b_1 + \frac{a_1}{3} = 3 \cdot 4 + 3 = 15, \quad v_1 = 3b_1 - \frac{a_1}{3} = 3 \cdot 4 - 3 = 9, \quad w_1 = 4b_1 = 16,$$

donc, d'après (8):  $T_{14} + T_8 = T_{15}$ .

Or, les formules (8) ne donnent pas toutes les solutions de l'équation  $T_x + T_y = T_z$  en nombres naturels  $x, y, z$ , puisqu'on a, par exemple :

$$T_{54} + T_{20} = T_{55}, \quad T_{118} + T_{34} = T_{119}, \quad T_{138} + T_{38} = T_{140}.$$

Il est à remarquer qu'il existe une paire des nombres tétraédraux égaux, dont la somme est un nombre tétraédral, puisque  $T_3 + T_3 = T_4$ . Je ne sais pas s'il existe d'autres telles paires. Or, il résulte facilement d'un théorème de M. A. THUE, publié dans Det Kong. Norske Vid. Selskab Skrifter 1911, Nr. 3, que l'équation  $2T_x = T_y$  n'a qu'un nombre fini de solution en nombres naturels  $x$  et  $y$ .

Il résulte tout de suite de notre théorème qu'il existe une infinité des paires de nombres tétraédraux distincts dont la différence est un nombre tétraédral. Par exemple  $T_{15} - T_{14} = T_8$ .

Or, je ne connais aucune paire des nombres tétraédraux distincts dont la somme ainsi que la différence seraient des nombres tétraédraux. W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

## Dichteste Kreispackungen auf einem Zylinder

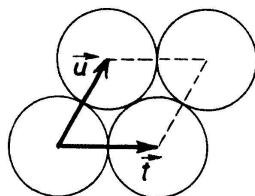
Gewisse Pflanzenformationen, wie zum Beispiel der Maiskolben, legen die Frage der dichtesten Kreispackung auf einem Zylinder nahe: wieviele aus Papier ausgeschnittene Kreisscheiben vom Durchmesser 1 lassen sich auf den Mantel eines vorgegebenen, «sehr langen» Zylinders ohne gegenseitige Überdeckung aufkleben?

Betrachten wir den einfachen Fall, in dem der Umfang  $U$  des Zylinders eine natürliche Zahl  $U = n$  ist. Dann können wir  $n$  Kreise in gleicher Höhe so anbringen, dass der erste Kreis den zweiten, der zweite den dritten, ..., der  $n$ -te den ersten berührt. Es entsteht ein «Kreisring». Aus solchen Kreisringen lässt sich eine dichteste regelmässige<sup>1)</sup> Kreislagerung aufbauen, in der die Berührungspunkte der Kreise jede Kreislinie in sechs Teilbögen zerlegen<sup>2)</sup>. Die Dichte dieser Kreispackung beträgt

<sup>1)</sup> Die Regularität bedeutet, dass sich jeder Kreis in jeden anderen durch eine Deckbewegung der Lagerung überführen lässt.

<sup>2)</sup> Im Falle  $n > 1$  lässt sich diese Kreispackung einfacher kennzeichnen: jeder Kreis wird von sechs anderen berührt.

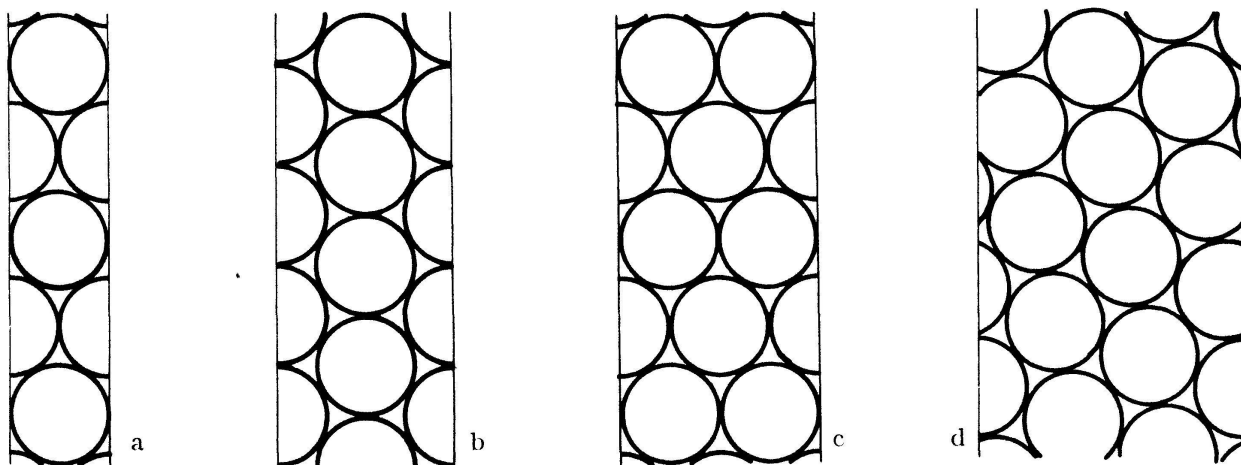
$\pi/\sqrt{12} = 0,9069\dots$ . Das ist zugleich die Dichte der dichtesten ebenen Kreislagerung<sup>3)</sup>. Die Tatsache, dass kongruente Kreise auf einem Zylinder nicht dichter gepackt werden können als in der Ebene, folgt daraus, dass durch Abrollen eines dichter als  $\pi/\sqrt{12}$  gepackten Zylinders auf die Ebene eine ebenso dichte ebene Kreispackung entstünde, was unmöglich ist.



Figur 1

Es ist nun bemerkenswert, dass diese maximale Lagerungsdichte auch für andere Werte von  $U$  erreicht werden kann. Um diese Umfangswerte  $U$  zu bestimmen, gehen wir von der einfachen Bemerkung aus, dass sich ein ebenes Muster dann und nur dann durch Abrollen eines gemusterten Zylinders vom Umfang  $U$  erzeugen lässt, wenn das Muster durch eine Translation von der Grösse  $U$  mit sich in Deckung gebracht werden kann. Nun lässt sich jede Decktranslation der dichtesten gitterförmigen Lagerung von Kreisen vom Durchmesser 1 durch einen Vektor  $p\mathbf{t} + q\mathbf{u}$  darstellen, wobei  $p$  und  $q$  ganze Zahlen sind und die Vektoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{u}$  durch  $\mathbf{t}^2 = \mathbf{u}^2 = 1$  und  $\mathbf{t}\mathbf{u} = 1/2$  gekennzeichnet sind (Figur 1). Mit Rücksicht auf  $(p\mathbf{t} + q\mathbf{u})^2 = p^2 + pq + q^2$  ist also die notwendige und hinreichende Bedingung, dass ein Zylinder vom Umfang  $U$  eine dichteste regelmässige Packung von Kreisen vom Durchmesser 1 gestattet:

$$U^2 = p^2 + pq + q^2, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, \quad p + q > 0.$$



Figur 2

Figur 2 stellt die entsprechenden Lagerungen in einigen Fällen dar. Es leuchtet nach der Anschauung ein, dass für andere Werte von  $U$  die Lagerungsdichte bei keiner denkbaren Kreisanordnung den Wert  $\pi/\sqrt{12}$  erreichen kann. Jedoch scheint der Beweis nicht ganz einfach zu sein.

<sup>3)</sup> Siehe zum Beispiel L. FEJES TÓTH: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Berlin 1953.

Ordnen wir die Zahlen von der Form  $\sqrt{p^2 + pq + q^2}$  nach ihrer Grösse (Figur 3), so entsteht eine Folge  $U_1, U_2, \dots$ . Es gilt also

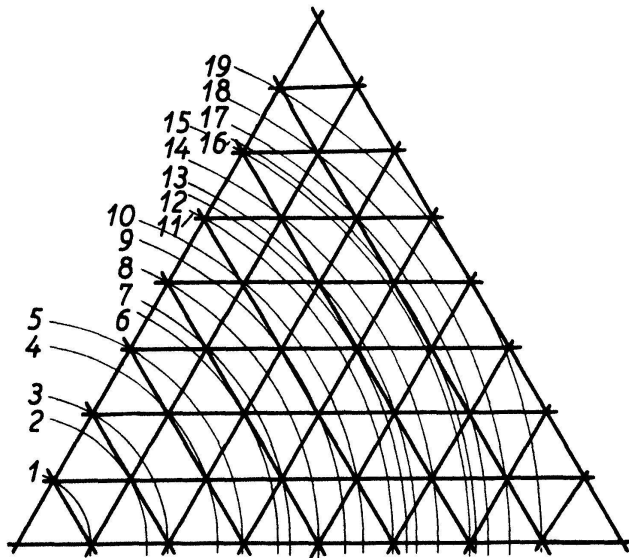
$$U_1 = 1, U_2 = \sqrt{3} \approx 1,73, U_3 = 2, U_4 = \sqrt{7} \approx 2,65, U_5 = 3, U_6 = \sqrt{12} \approx 3,46,$$

$$U_7 = \sqrt{13} \approx 3,61, U_8 = 4, U_9 = \sqrt{19} \approx 4,36, U_{10} = \sqrt{21} \approx 4,58, U_{11} = 5,$$

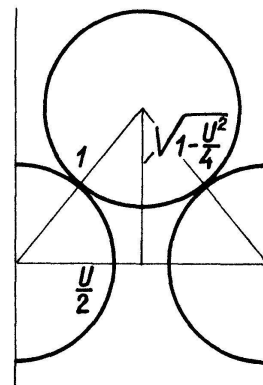
$$U_{12} = \sqrt{27} \approx 5,20, U_{13} = \sqrt{28} \approx 5,29, U_{14} = \sqrt{31} \approx 5,57, U_{15} = 6,$$

$$U_{16} = \sqrt{37} \approx 6,08, U_{17} = \sqrt{39} \approx 6,24, U_{18} = \sqrt{43} \approx 6,56, U_{19} = 7, \dots$$

Bezeichnen wir noch die obere Grenze der Lagerungsdichte von Kreisen vom Durchmesser 1 auf einem Zylinder vom Umfang  $U$  ( $\geq 1$ ) mit  $d(U)$ , so gilt  $d(U) \leq \pi/\sqrt{12}$ , mit Gleichheit für (und vermutlich nur für)  $U = U_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).



Figur 3



Figur 4

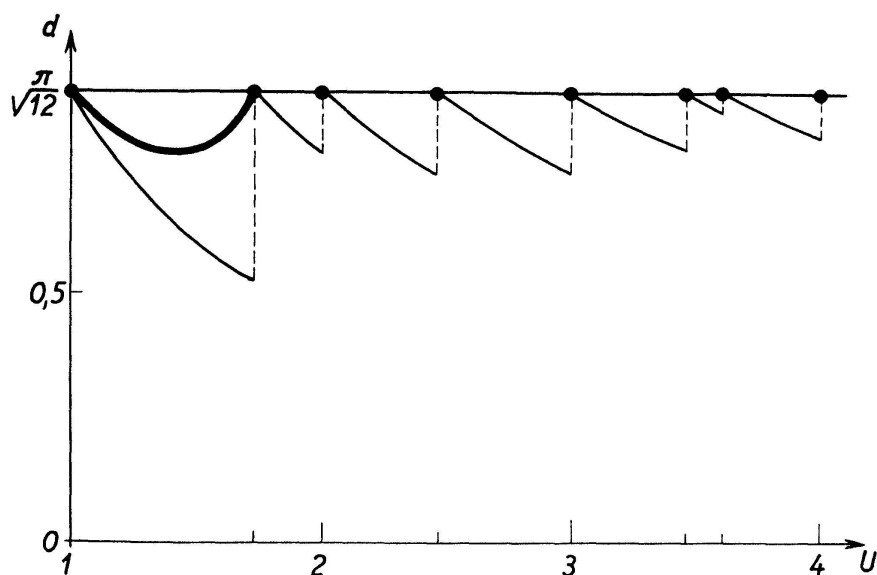
Im Intervall  $(U_1, U_2)$  lässt sich die Funktion  $d(U)$  leicht in expliziter Form darstellen. Wir haben nur zu bemerken, dass für  $U_1 \leq U \leq U_2$  die Niveaudifferenz zwischen je zwei Kreisen  $\geq \sqrt{1 - (U^2/4)}$  ist (Figur 4). Ist also  $m$  eine natürliche Zahl, so können in einer Zone von der Höhe  $m \sqrt{1 - (U^2/4)} + 1$  höchstens  $m + 1$  Kreise liegen. Hieraus ergibt sich

$$d(U) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m + 1) \frac{\pi}{4}}{U \left( m \sqrt{1 - \frac{U^2}{4}} + 1 \right)} = \frac{\pi}{2 U \sqrt{4 - U^2}}, \quad 1 \leq U \leq \sqrt{3}.$$

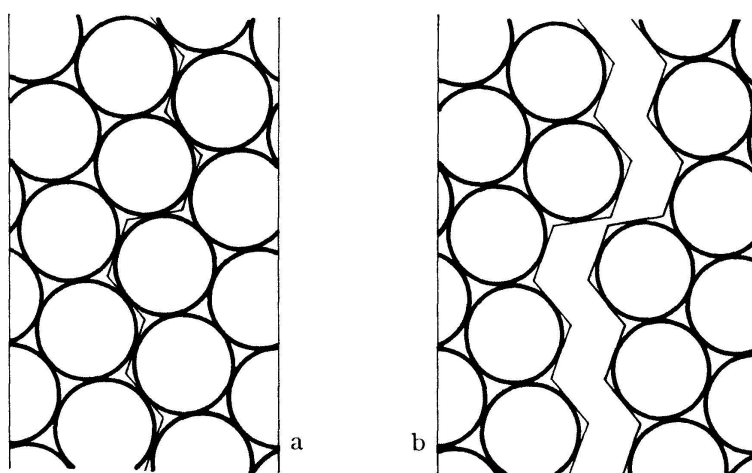
Auch im Intervall  $(U_2, U_3) = (\sqrt{3}, 2)$  lässt sich  $d(U)$  verhältnismässig einfach bestimmen, aber für beliebige Werte von  $U$  scheint eine explizite Darstellung recht kompliziert zu sein.

Eine triviale untere Schranke für  $d(U)$  ist  $\pi/\sqrt{12} \cdot U_n/U$ , wobei  $n$  so gewählt wird, dass  $U_n \leq U < U_{n+1}$  ausfällt (Figur 5). Eine Lagerung von dieser Dichte entsteht aus der dichtesten Lagerung auf dem Zylinder vom Umfang  $U_n$ , wenn man den

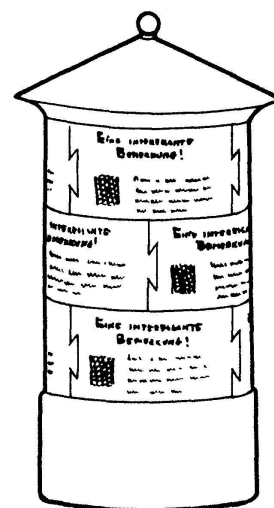
Zylinder entlang einer die Kreise nicht schneidende, «monoton steigende» Kurve aufschneidet und einen (unausgenützten) Streifen von der Breite  $U - U_n$  einsetzt (Figur 6).



Figur 5



Figur 6



Figur 7

Aus unserer letzten Erwägung folgt, dass eine Menge konvexer «Plakate», die auf einer gewissen Plakatsäule Platz haben, stets auch auf eine gleich hohe, aber breitere Säule aufgeklebt werden können. Es ist interessant, zu bemerken, dass diese trivial klingende Behauptung für nicht konvexe Plakate nicht mehr gilt. Dies leuchtet an Hand der in Figur 7 dargestellten Plakate ein.

L. FEJES TÓTH, Budapest

## Prüfung einer Kreisform mit Hohlwinkel und Taster

1. F. HOHENBERG beschreibt in [1, S. 164f.] eine Anordnung, mit der geprüft werden kann, ob der Querschnitt  $k$  eines zylindrischen Werkstückes ein Kreis ist. Das Werkstück wird in einem Hohlwinkel  $\alpha$  gedreht und dabei von einem Taster berührt;  $\alpha, \beta, \gamma$  seien die Innenwinkel des von Hohlwinkel und Taster gebildeten Dreiecks  $\Delta$  (Figur 1). Bleibt bei der Drehung der Taster in Ruhe, so ist nach einem