Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Da in (20) wegen $\nu \equiv \pm 1(n)$ nur Glieder für $\nu \geqq n - 1$ auftreten, gilt erst recht

$$\sum_{\nu=n-1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) < \frac{2\, a_0^2}{n(n-2)} . \tag{21}$$

Das Integral (18) strebt also gegen Null für $n \to \infty$ und wegen $f^2(u) > 0$ damit auch $f(u)$.

Da die Messgenauigkeit eine natürliche Grenze nicht unterschreiten kann, kommt der Praktiker also auch mit einer Prüfanordnung aus, bei der *sämtliche* α_i/π *rational* sind, wenn nur der Hauptnenner q von α_i/π und damit n *hinreichend gross* ist.

HERMANN SCHAAL, Stuttgart

LITERATUR

[1] HOHENBERG, F.: Konstruktive Geometrie in der Technik. Wien 1961.
[2] FUJIWARA, M.: Über die einem Vielecke eingeschriebenen und umdrehbaren konvexen geschlossenen Kurven. The Science Reports, Tôhoku University *4*, 43–55 (1915).
[3] MEISSNER, E.: Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik. Viertelj. d. naturf. Gesellsch. Zürich *54*, 309–329 (1909).
[4] BARBIER, E.: Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. J. Math. pures appl. (2) *5*, 273–286 (1860).
[5] GOLDBERG, M.: Rotors in Polygons and Polyhedra. Math. of Computation *14*, 229–239 (1960).
[6] WUNDERLICH, W.: Über eine Klasse zwangläufiger höherer Elementenpaare. Z. angew. Math. Mech. *19*, 177–181 (1939).
[7] JAGLOM, I. M.-BOLTJANSKI, W. G.: Konvexe Figuren. Berlin 1956.
[8] HURWITZ, A.: Mathematische Werke *I*. Basel 1932.
[9] HADWIGER, H. und DEBRUNNER, H.: Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene. L'Enseignement Math. *1*, 56–89 (1955).
[10] HADWIGER, H.: Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie. Elemente der Math. *1*, 98–100 (1946).

Ungelöste Probleme

Nr. 42. *Existe-t-il une infinité de nombres de* FERMAT $2^{2^n} + 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *dont le premier chiffre* (*dans la représentation décimale*) *est* $= 1$?

D'après un théorème que j'ai démontré dans mon article: *Sur les puissances du nombre* 2, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, vol. *23*, 249 (1950), Théorème 2, m étant un nombre naturel quelconque et s le nombre des chiffres du nombre m (en représentation décimale), il existe un nombre naturel n tel que les s premiers chiffres du nombre $2^n + 1$ coincident respectivement avec les chiffres du nombre m. Une proposition analogue est-elle vraie pour les nombres de FERMAT?

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Kleine Mitteilungen

Eine stereometrische Dodekaeder-Konstruktion

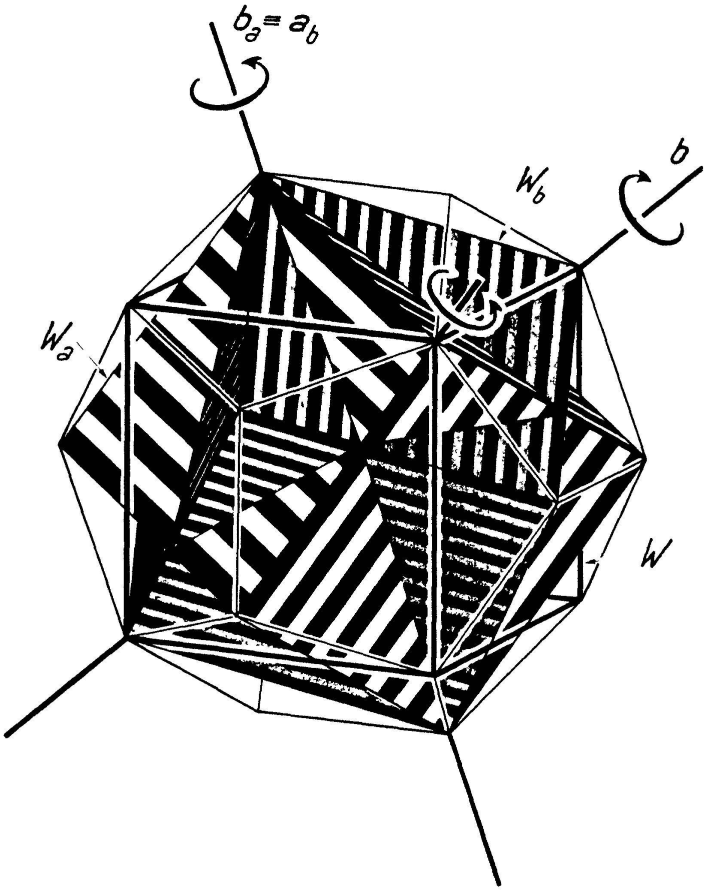
mit inhärentem Existenz- und Regularitätsbeweis

L. LOCHER-ERNST hat in dieser Zeitschrift[1]) auf Lücken in der Schulbuchbehandlung des Dodekaeders hingewiesen. So mag es interessieren, dass man das Dodekaeder aus dem Würfel durch eine *räumliche* Konstruktion so gewinnen kann, dass darin – in der Art eines «indischen Beweises» – zugleich der Nachweis liegt, dass es regulär ist.

[1]) *Konstruktionen des Dodekaeders und Ikosaeders.* El. Math. *10*, 73–81 (1955).

Aufgabe: Zum Würfel W ein regelmässiges Dodekaeder, welches die Ecken von W enthält, zu konstruieren.

Konstruktion: ε sei diejenige Mittel(parallel)ebene von W, welche senkrecht steht zur Verbindungsebene zweier Körperdiagonalen a, b von W. Man dreht zwei, ursprünglich mit W zusammenfallende Exemplare des Würfels gleichzeitig um a und (spiegelbildlich zu ε) um b. Die Endlagen W_a und W_b von W seien charakterisiert durch das Zusammenfallen der zugehörigen Endlagen b_a von b und a_b von a (welches in ε statthat). Analoge Würfel W_c, W_d entstehen aus den anderen Diagonalen c, d von W und sind symmetrisch zu W_a, W_b bezüglich der übrigen Mittelebenen von W.



Behauptung: Die Ecken von W_a, W_b, W_c, W_d, die wegen der genannten Symmetrien paarweise zusammenfallen, bilden mit denen von W die 20 Ecken des gesuchten Dodekaeders.

Beweis: Man dreht W_b in W_a um die gemeinsame Diagonale $b_a = a_b$. Weil a (resp. b) gemeinsame Diagonale von W und W_a (resp. von W und W_b) ist, geht eine Diagonale von W_b in a (resp. b in eine von W_a) über. Hierbei beschreiben ihre Endpunkte kongruente Bögen auf der gemeinsamen Umkugel aller Würfel. Die Sehnen sind *Grat*kanten der bekannten Walmdächer über den Flächen von W. Die Endpunkte der noch übrigen Diagonale von W_b jedoch beschreiben – mit den vorigen kongruente – Bögen über *First*kanten. So sind die fünf Kanten der (untereinander kongruenten) Dächer gleich. – Die Ecken anstossender Dächer bilden sphärische Fünfecke. Ihre Seitenbögen (über den als gleich erkannten Grat- und Firstkanten) sind gleich. Aber auch ihre Diagonalenbögen sind untereinander gleich, weil deren Sehnen Würfelkanten sind. Die sphärischen Fünfecke sind daher regulär und a fortiori auch ebene. Das aus diesen gebildete Dodekaeder hat also eine Umkugel und von selbst kongruente körperliche Ecken, ist also das gesuchte.

Rückblick: Die Konstruktion ist das Ergebnis von im ganzen vier symmetrischen Drehungen um die Körperdiagonalen eines Würfels bis zur Inzidenz weiterer Diagonalen. Die vier neuen Würfel bilden mit dem ursprünglichen zunächst *zwei Dreiheiten* und durch Verschmelzung des gemeinsamen, ursprünglichen Würfels die *Fünfheit* gleichberechtigter

Würfel. – Der Beweis beruht auf sinngemässer Fortsetzung der Konstruktion: Drehung der entstandenen Würfel um ihre gemeinsame Diagonale.

Frage: Ist es wohl denkbar, dass EUKLID bei der Ausmerzung des Bewegungsbegriffes eine den «Initiates» – im Sinn der von COXETER[2]) zitierten Äusserung D'ARCY THOMPSON's – bekannte, ihm nur noch als heuristisch geltende Behandlung unterdrückte, aber die Dächer beibehielt? Denn wer das Dodekaeder wie EUKLID konstruiert, kennt auch die Fünfwürfel-Figur.

Bemerkung: Der Verfasser wurde auf die Konstruktion aufmerksam, als er eine bestimmte Ausführung des Fünfwürfel-Gebildes eingehender betrachtete[3]) und widmet sie dem Andenken ihres Herstellers.

GEORG UNGER, Dornach

Some Geometric Inequalities

Let h_1, h_2, h_3 be the altitudes of a triangle with the sides a_1, a_2, a_3, F – its area, r, R – the radii of the inscribed and circumscribed circles, $M_n(x)$ is a power mean of order n of x_1, x_2, x_3:

$$M_n(x) = \left(\frac{x_1^n + x_2^n + x_3^n}{3}\right)^{1/n};$$

$M_0(x)$ is ex definitione a geometrical mean of these numbers.

F. LEUENBERGER proved in [3] the inequalities

$$\frac{\sqrt{3}}{R} \leqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2r}. \tag{1}$$

Because

$$\frac{1}{r} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2F}$$

and

$$\frac{2F}{a_i} = h_i,$$

the second part of (1) may be written in the form

$$\frac{2F}{a_1} + \frac{2F}{a_2} + \frac{2F}{a_3} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 + a_2 + a_3),$$

$$h_1 + h_2 + h_3 \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 + a_2 + a_3),$$

which is equivalent to

$$M_1(h) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(a).$$

Now we prove that the inequalities

$$M_k(h) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} M_k(a)$$

and

$$M_{-k}(h) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} M_{-k}(a)$$

are equivalent. In fact, the following inequalities are equivalent:

$$\left(\frac{h_1^k + h_2^k + h_3^k}{3}\right)^{1/k} \leqq \left(\frac{a_1^k + a_2^k + a_3^k}{3}\right)^{1/k},$$

---

[2]) Wiedergegeben in der unter [1]) zitierten Arbeit.

[3]) CARL KEMPER (Maler und Plastiker, † 1957, Dornach) hinterliess eine fast vollendete Reihe von Modellen, deren Konstruktionselemente die Ebenen aus dem Zentrum nach den Kanten der regelmässigen und verwandter Körper sind. Sie bringen vermöge regelmässiger Begrenzungen dieser Ebenen durch Vielecke die Symmetrien besonders schön zur Anschauung. Eine Veröffentlichung ist in Vorbereitung.

$$\left(\frac{\left(\frac{2F}{a_1}\right)^k + \left(\frac{2F}{a_2}\right)^k + \left(\frac{2F}{a_3}\right)^k}{3}\right)^{1/k} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\left(\frac{2F}{h_1}\right)^k + \left(\frac{2F}{h_2}\right)^k + \left(\frac{2F}{h_3}\right)^k}{3}\right)^{1/k},$$

$$\left(\frac{a_1^{-k} + a_2^{-k} + a_3^{-k}}{3}\right)^{1/k} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{h_1^{-k} + h_2^{-k} + h_3^{-k}}{3}\right)^{1/k},$$

$$\left(\frac{h_1^{-k} + h_2^{-k} + h_3^{-k}}{3}\right)^{-1/k} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a_1^{-k} + a_2^{-k} + a_3^{-k}}{3}\right)^{-1/k}.$$

Thus the result of LEUENBERGER implies the inequality

$$M_{-1}(h) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} M_{-1}(a) .$$

L. CARLITZ stated in [1] the inequality

$$(a_1\, a_2\, a_3)^2 \geqq \left(\frac{4}{\sqrt{3}} F\right)^3$$

which, as $2F = a_i\, h_i$, gives

$$(a_1\, a_2\, a_3)^2 \geqq \frac{8}{3\sqrt{3}} a_1\, a_2\, a_3\, h_1\, h_2\, h_3 ,$$

$$h_1\, h_2\, h_3 \leqq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 a_1\, a_2\, a_3 ,$$

$$\sqrt[3]{h_1\, h_2\, h_3} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{a_1\, a_2\, a_3} .$$

The last inequality may be written in the form

$$M_0(h) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} M_0(a) .$$

The first part of (1) follows from the inequality of KUBOTA (see [2]):

$$M_2(a) \leqq R\sqrt{3}$$

and theorem of SCHLÖMILCH: If $m < n$, then

$$M_m(x) \leqq M_n(x) .$$

I do not know the solution of the following problem:
Let K be the least upper bound of the values of k for which inequality

$$M_k(a) \leqq R\sqrt{3}$$

holds. Result of KUBOTA implies the inequality $K \geqq 2$. What is the exact value of K? Is K equal to

$$\frac{\log 9 - \log 4}{\log 4 - \log 3} \;?$$

REFERENCES

[1] L. CARLITZ, *Problem E 1454*, Amer. Math. Monthly *68*, 177 (1961).
[2] T. KUBOTA, Tôhoku Math. Journ. *25*, 122–126 (1925).
[3] F. LEUENBERGER, *Dreieck und Viereck als Extremalpolygone*, El. Math. *15*, 77–79 (1960).

A. MĄKOWSKI, Warsaw

Berichtigung

In den Anmerkungen zur kleinen Mitteilung über den Mordellschen Beweis einer Ungleichung von Erdös [El. Math. *17*, 17 (1962)] ist ein Name unrichtig erschienen; er lautet: D. K. KAZARINOFF.