

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 17 (1962)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Eine elementare Methode für Unmöglichkeitbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal  
**Autor:** Laugwitz, Detlef  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21911>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Als ansprechende, wenig umfangreiche Einführungen sind die beiden folgenden Publikationen zu empfehlen, die auch weitere Literaturangaben enthalten:

1) R. H. BING: Elementary Point Set Topology. The American Mathematical Monthly, Volume 67, Number 7, Part II, 1960.

2) E. M. PATTERSON: Topology. Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.

JOHANNES M. EBERSOLD

## Eine elementare Methode für Unmöglichkeitbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Bei dem Versuch, für Anfangssemester in Vorlesungen über «Schulmathematik vom höheren Standpunkt» die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal möglichst elementar darzustellen, habe ich in der Literatur nur wenig Hilfe finden können. Eine elementare Methode für Unmöglichkeitbeweise, die ich mir zurechtgelegt habe, mag deshalb auch für andere von Interesse sein, zumal sie durchaus auch Schülern zugänglich ist. Die Methode braucht nur einfachste Sätze über Polynome und vermeidet alle Mittel der Körpertheorie; sie scheint einheitlich viele alte und neue Unmöglichkeitbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu erfassen, soweit sie nicht ihrer Natur nach transzendente Mittel erfordern (Kreisquadratur) oder Gleichungen höheren als 4. Grades (Kreisteilung). In der Literatur werden meist nur die klassischen Unmöglichkeitbeweise behandelt: Winkeldrittung, Würfelverdoppelung, reguläre  $n$ -Ecke [1], [2], [3], [5], [6], [10], [11]. Die Beweise setzen meist auch noch mehr Vorkenntnisse aus der Algebra voraus, als nötig wären. Zur Theorie der Dreiecks-konstruktionen finden sich in den zugänglichen Büchern nur wenige Beiträge, so in [7]<sup>1)</sup>. Da andererseits noch in neuerer Zeit Originalabhandlungen über spezielle Unmöglichkeitbeweise bei Dreiecken erschienen sind (Dreieck aus den drei Winkelhalbierenden [8]; andere Sätze in [4] und [9]), mag es gerechtfertigt sein, eine Methode hier darzustellen, deren einzelne Teile zwar längst bekannt sind, die aber einfachere Beweise auch für schon bekannte Sätze erlaubt.

### 1. Konstruktionen dritten und vierten Grades

Vorausgesetzt wird der leicht zu beweisende Satz (z. B. [3], [5], [6], [10]), dass bei vorgegebenen Streckenlängen oder Punktkoordinaten genau diejenigen Punkte (Strecken) mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, deren Koordinaten (Massgrößen) aus den gegebenen Größen durch endliche Anwendung der rationalen Operationen und der Operation des Quadratwurzelnziehens hervorgehen. Vorausgesetzt wird ferner der Begriff des Körpers (aber kein Satz der Körpertheorie). Mit  $K_0$  wird der Körper der rationalen Zahlen bezeichnet, mit  $K_1$  ein Körper, der aus allen rationalen Ausdrücken in einer festen Quadratwurzel  $\sqrt{d_1}$  mit rationalen Koeffizienten besteht ( $d_1$  rational, aber kein Quadrat). Allgemein besteht der Körper  $K_n$  aus allen rationalen Ausdrücken (oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft, allen gebrochen-linearen Ausdrücken) in  $\sqrt{d_n}$  mit Koeffizienten aus  $K_{n-1}$ , wo  $d_{n-1}$ , aber nicht  $\sqrt{d_{n-1}}$  aus  $K_{n-1}$ . Offenbar liegt jede Zahl, die aus der Zahl 1 mit Zirkel und Lineal konstru-

<sup>1)</sup> Auch in den IMUK-Bänden [1], [2] finden sich keine elementaren Beiträge zu unserem Aufgabenkreis.

ierbar ist, in einem Körper  $K_n$ , und es gibt zu einer festen konstruierbaren Zahl ein minimales  $n$ .

Für eine Zahl  $x$ , über deren Konstruierbarkeit aus vorgegebenen rationalen Zahlen zu entscheiden sei, bestehe eine kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten  $a_k$

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \quad (1)$$

Es besteht nun der wichtige Satz:

Satz 1. Es gibt ein Verfahren, das in endlich vielen Schritten die Entscheidung ermöglicht, ob (1) konstruierbare Wurzeln hat oder nicht. Der Beweis ergibt sich aus zwei Hilfssätzen.

Hilfssatz 1. Die Gleichung (1) hat dann und nur dann eine konstruierbare Wurzel, wenn sie eine rationale hat.

Der Beweis findet sich in einschlägigen Büchern (z. B. [5], [6]), sei aber wegen seiner Kürze hier angedeutet. Wenn (1) eine rationale Wurzel hat, so ist diese konstruierbar. Hat (1) umgekehrt eine konstruierbare Wurzel, so sei  $x_1$  diejenige konstruierbare Wurzel, die in  $K_n$  mit minimalem  $n$  liegt. Behauptung:  $n = 0$ . Wäre  $n > 0$ , so hätten wir

$$x_1 = a + b\sqrt{d}, \quad a, b, d, \text{ aus } K_{n-1}, \quad \sqrt{d} \text{ nicht aus } K_{n-1}, \quad b \neq 0.$$

Einsetzen in (1) zeigt, dass auch

$$x_2 = a - b\sqrt{d}$$

eine Wurzel ist, die von  $x_1$  verschieden ist. Nach VIËTA gilt für die dritte Wurzel

$$x_3 = -x_1 - x_2 - a_2 = -2a - a_2,$$

die also in  $K_{n-1}$  läge, im Gegensatz zur Minimaleigenschaft von  $K_n$ . Also bleibt nur  $n = 0$ , wie behauptet.

Es ist also nur erforderlich, auf rationale Wurzeln zu prüfen. Dies leistet ein einfacher Satz von GAUSS (z. B. [10]). Zunächst multipliziere man (1) mit dem Hauptnenner der Koeffizienten, so dass sich eine Gleichung mit ganzen Koeffizienten ergibt

$$g_3 x^3 + g_2 x^2 + g_1 x + g_0 = 0. \quad (2)$$

Multiplikation mit  $g_3^2$  und Substitution  $g_3 x = y$  gibt eine Gleichung

$$y^3 + h_2 y^2 + h_1 y + h_0 = 0, \quad (3)$$

die zugleich mit (2) rationale Wurzeln besitzt. Hier besteht, weil der Koeffizient der höchsten Potenz 1 ist, der Gaußsche

Hilfssatz 2. Alle rationalen Wurzeln der Gleichung (3) sind ganze Zahlen und Teiler von  $h_0$ .

Dieser Satz (der für Polynome beliebig hohen Grades gilt) ist so einfach zu beweisen, dass der Leser dies selbst tun möge (vgl. auch [10]). Man braucht also nur zu prüfen, ob einer der endlich vielen Teiler von  $h_0$  (negative Teiler nicht vergessen!) Wurzel von (3) ist, um zu entscheiden, ob (1) eine konstruierbare Wurzel hat.

Besteht statt (1) eine biquadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, so lässt sich die Aufgabe stets auf ein kubisches Problem zurückführen. Sei die biquadratische Gleichung

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (4)$$

gegeben, so gilt:

Satz 2. Die Gleichung (4) hat dann und nur dann eine konstruierbare Wurzel, wenn die «kubische Resolvente» ihrer reduzierten Gleichung eine solche besitzt. (Die reduzierte Gleichung

$$y^4 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0 \quad (5)$$

entsteht aus (4) nach Division durch  $a_4$  und Substitution  $x = y - a_3/4 a_4$ ; sie hat zugleich mit (4) rationale Koeffizienten. Ihre kubische Resolvente ist

$$z^3 + 2 b_2 z^2 + z (b_2^2 - 4 b_0) - b_1^2 = 0 \quad (6)$$

Einen einfachen Beweis dieses Satzes findet man zum Beispiel in [10], S. 250ff. Damit sind die Aufgaben, die auf biquadratische Gleichungen führen, mit der vorhergehenden Methode zu behandeln.

## 2. Die klassischen Probleme

a) Würfelverdoppelung.

Die Kantenlänge  $x$  des Würfels vom Volumen 2 genügt der Gleichung  $x^3 - 2 = 0$ . Wäre  $x$  aus 1 mit Zirkel und Lineal konstruierbar, so müsste diese Gleichung eine ganzzahlige Wurzel haben, die Teiler von  $(-2)$  zu sein hätte; aber  $\pm 1, \pm 2$  sind keine Wurzeln.

b) Winkeldrittung.

Für die Drittelung des Winkels  $\varphi$  besteht mit  $x = 2 \cos(\varphi/3)$  die Gleichung

$$x^3 - 3x - 2 \cos \varphi = 0$$

speziell für  $\varphi = \pi/3$  also

$$x^3 - 3x - 1 = 0,$$

und da mit dem Winkel  $\varphi/3$  auch  $x$  konstruierbar sein müsste, müsste diese Gleichung eine rationale Wurzel haben, für die nur  $\pm 1$  in Frage kämen, die beide keine Wurzeln sind.

Der Winkel  $20^\circ$  und damit das reguläre Neuneck sind nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

3. Dreieckskonstruktionen, bei denen unter anderem Winkelhalbierende vorgegeben sind

a) Dreieck aus

den drei Winkelhalbierenden  $(w_\alpha, w_\beta, w_\gamma)$ ,

zwei Winkelhalbierenden  $(w_\alpha, w_\beta)$  und der dritten Höhe  $(h_c)$ ,

zwei Winkelhalbierenden  $(w_\alpha, w_\beta)$  und der dritten Seitenhalbierenden  $(s_c)$ .

Alle drei Aufgaben werden simultan dadurch erledigt, dass die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks ( $a = b$ , Figur 1) aus  $w_\alpha = w_\beta = w$ ,  $h_c = h$  unmöglich ist. Aus den beiden Beziehungen

$$c \sin \alpha = w \sin \frac{3\alpha}{2} \quad \text{und} \quad c \sin \alpha = 2h \cos \alpha$$

folgt für  $x = \sin \alpha/2$ :

$$4w x^3 - 4hx^2 - 3wx + 2h = 0.$$

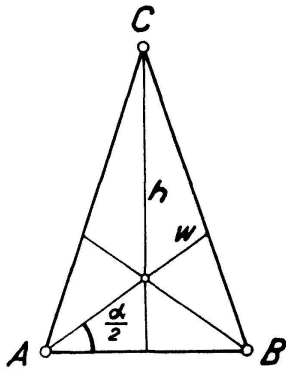
Eine geometrisch mögliche Wahl ist  $w = 2, h = p = \text{Primzahl} > 2$ ; hier hat man für  $2x = y$  die Gleichung

$$y^3 - py^2 - 3y + 2p = 0,$$

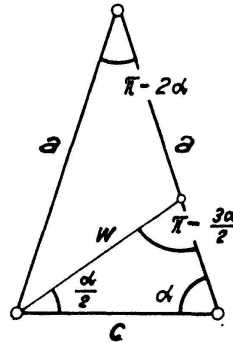
die eine rationale Wurzel haben müsste, wenn das Problem allgemein mit Zirkel und Lineal lösbar wäre. Die einzig möglichen Werte  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm p$ ,  $\pm 2p$  sind aber keine Wurzeln.

b) Dreieck aus

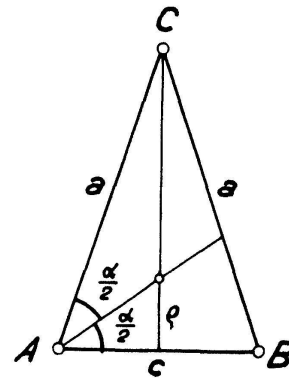
zwei Seiten ( $a, b$ ) und einer zugehörigen Winkelhalbierenden ( $w_\alpha$ ),  
zwei Winkelhalbierenden ( $w_\alpha, w_\beta$ ) und einer zugehörigen Seite ( $a$ ).



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Beide Aufgaben werden dadurch erledigt, dass die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks ( $a = b$ , Figur 2) aus  $a = b$ ,  $w_\alpha = w_\beta = w$  unmöglich ist. Man hat die beiden Beziehungen

$$c \sin \alpha = w \sin \frac{3\alpha}{2} \quad \text{und} \quad c \sin \alpha = a \sin 2\alpha.$$

Dies ergibt für  $x = \sin^2 \alpha/2$  die Gleichung

$$4a \sqrt{1-x} (1-2x) = w (3-4x).$$

Nach Quadrieren substituiert man  $4x = y$  und setzt etwa  $a = w = 1$ , was geometrisch möglich ist. Dann besteht für  $y$  die Gleichung

$$y^3 - 7y^2 + 14y - 7 = 0,$$

deren rationale Wurzeln sämtlich positiv sein müssen, so dass nur  $+1$ ,  $+7$  in Frage kämen, die beide keine Nullstellen sind.

4. Dreieckskonstruktionen, bei denen unter anderem der Inkreisradius  $\rho$  vorgegeben ist

a) Dreieck aus zwei Seiten ( $a, b$ ) und dem Inkreisradius  $\rho$ .

Wir betrachten den Fall  $a = b$  (Figur 3). Hier ergeben sich die beiden Beziehungen

$$2\rho = c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad c = 2a \cdot \cos \alpha.$$

Elimination des Winkels  $\alpha$  gibt eine kubische Gleichung für die dritte Seite  $c$ :

$$c^3 - 2ac^2 + 4\rho^2 c + 8\rho^2 a = 0.$$

Da  $\rho/a \leq \sqrt{3}/6$  für die Realisierbarkeit hinreicht, kann etwa  $a = 2$ ,  $\rho = 1/2$  gesetzt werden, so dass dann

$$c^3 - 4c^2 + c + 4 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt keine rationalen Lösungen.

b) Dreieck aus zwei Winkelhalbierenden ( $w_\alpha, w_\beta$ ) und dem Inkreisradius  $\varrho$ .

Wieder beim gleichschenkligen Dreieck,  $w_\alpha = w_\beta = w$ , haben wir die Beziehungen:

$$2\varrho = c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad c \sin \alpha = w \sin \frac{3\alpha}{2}.$$

Elimination von  $c$  und  $x = \sin \alpha/2$  ergibt die kubische Gleichung

$$4wx^3 - 4\varrho x^2 - 3wx + 4\varrho = 0.$$

Da  $w = 4\varrho$  geometrisch möglich ist, ergibt sich in diesem Falle mit  $4x = y$

$$y^3 - y^2 - 12y + 16 = 0.$$

Diese Gleichung hat, wie man durch Einsetzen der Teiler von 16 in die linke Seite verifiziert, keine rationalen Lösungen.

c) Gleichschenkliges Dreieck aus  $\varrho$  und Flächeninhalt  $F$ .

Mit den Bezeichnungen der vorstehenden Aufgaben hat man die Beziehungen

$$2\varrho = c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad c^2 \operatorname{tg} \alpha = 4F.$$

Elimination von  $\alpha$  gibt die kubische Gleichung für  $c$ :

$$c^3 - \frac{F}{\varrho} c^2 + 4F\varrho = 0$$

$F = 6, \varrho = 1$  ist geometrisch möglich, aber die Gleichung

$$c^3 - 6c^2 + 24 = 0$$

hat keine rationale Lösung.

DETLEF LAUGWITZ, Darmstadt

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BEHNKE, FLADT, SÜSS: *Grundzüge der Mathematik, I. Algebra* etc. (Göttingen 1958).
- [2] BEHNKE, BACHMANN, FLADT, SÜSS: *Grundzüge der Mathematik, II. Geometrie* (Göttingen, 1960).
- [3] BIEBERBACH, L.: *Theorie der geometrischen Konstruktionen* (Basel 1952).
- [4] BUCHNER, P.: *Eine Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist*. Elemente d. Math. 2, 14–16 (1947).
- [5] COURANT, R., und ROBBINS, H.: *What is mathematics?* (9. Aufl., New York 1958).
- [6] HERRMANN, A.: *Das Delische Problem* (Leipzig-Berlin 1927).
- [7] MESCHKOWSKI, H.: *Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie* (Braunschweig 1960).
- [8] NEISS, F.: *Über die Unmöglichkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Winkelhalbierenden*. J. reine angew. Math. 177, 129–133 (1937).
- [9] ROTH-DESMEULES, E.: *Noch eine Aufgabe, die nicht mit Zirkel und Lineal lösbar ist*. Elemente d. Math. 3, 65–67 (1948).
- [10] STRUBECKER, K.: *Einführung in die höhere Mathematik, I* (München 1956).
- [11] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra I* (Berlin-Göttingen-Heidelberg).