Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 17 (1962)

Heft: 4

Artikel: Über die Auflösung von Gleichungssystemen mit einer "Curta"

Autor: Schilt, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21916

durch U gehenden Sehstrahl konjugiert ist. Aus a) folgt nun, dass *sich die scheinbaren Umrisse* $(\bar{U})$ *bzw.* $(\bar{U}^*)$ *von* Φ *bzw.* Φ_U^* *in der Projektion* $\bar{U}$ *von* U *oskulieren.*

Betrachten wir nun eine beliebige Fläche Φ; es sei (U) ihr wahrer Umriss bei einer Parallelprojektion aus dem Fernpunkt O_∞ und $(\bar{U})$ der scheinbare Umriss. Sind (C_1) und (C_2) zwei auf Φ liegende Kurven, die (U) in einem seiner Punkte U nach konjugierten Richtungen durchsetzen, so sind die (C_1) bzw. (C_2) berührenden Normalschnitte des Φ in U oskulierenden Scheitelparaboloids Φ_U^* zwei Parabeln p_1 bzw. p_2, die durch eine krumme Schiebung aneinander die Fläche Φ_U^* erzeugen. Nach a) oskulieren sich die Projektionen von (C_1) und p_1 bzw. von (C_2) und p_2 im Riss $\bar{U}$ von U. Nach *b*) oskulieren sich die scheinbaren Umrisse von Φ und Φ_U^* in U. Da für Schiebflächen und ihre Schiebkurven der Satz von H. SCHAAL in diesen Zeilen bereits bewiesen wurde, ist durch die vorangehenden Betrachtungen dieser Satz neuerdings, und zwar auf einfache, anschauliche Weise abgeleitet.

Wegen einer Erweiterung der Gültigkeit des Satzes auf den Fall der Zentralprojektion sei auf die Arbeit von H. SCHAAL [1], S. 286 verwiesen. H. VOGLER, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. SCHAAL, *Zur Konstruktion der Krümmungskreise des scheinbaren Umrisses einer Fläche bei Zentral- und Parallelprojektion.* Sitzungsber. der Bayr. Akad. Wiss., math.-nat.Kl., 17 aus 1960, S. 277–310.

[2] W. BLASCHKE – H. R. MÜLLER, *Ebene Kinematik* (Verlag von R. Oldenburg, München 1956).

[3] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Springer, Wien 1957).

Über die Auflösung von Gleichungssystemen mit einer «Curta»

In einem Aufsatz in den Elementen bemerkt JÄGER[1]), der Gaußsche Algorithmus erschwere das Rechnen mit Tischrechenmaschinen, weil Divisionen vorkämen. Wir wollen hier zeigen, dass mit der «Curta» diese Erschwerung nicht vorliegt, so dass man mit dieser Maschine den Gaußschen Algorithmus bequem durchführen und seine Vorteile mit der Annehmlichkeit des Maschinenrechnens verbinden kann.

Es sei das lineare System:

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad \begin{matrix} k = 1 \text{ bis } M \\ i = 1 \text{ bis } N \end{matrix} \qquad M \geqslant N$$

gegeben. x_1 bis x_N seien die gesuchten Unbekannten, x_{N+1} bis x_M und y_1 bis y_N seien bekannte Grössen. Man kann dieses System folgendermassen in Matrixform schreiben:

$$\begin{array}{cc|ccccc|} & & x_1 & \dots & x_m & \dots & x_M \\ \hline y_1 & = & a_{11} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1M} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n & = & a_{n1} & \dots & a_{nm} & \dots & a_{nM} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_N & = & a_{N1} & \dots & a_{Nm} & \dots & a_{NM} \\ \hline \end{array}$$

[1]) B. JÄGER, *Ein Reduktionsverfahren für Determinanten und Gleichungssysteme.* Elemente der Math. *16*, 130ff. (1961).

Als Grundlage des Gaußschen Algorithmus dient der Austauschschritt, der nichts anderes darstellt als die Substitution einer bestimmten Variable, die man aus einer der N Gleichungen ausrechnet und in die übrigen einsetzt[2]). Wir wollen die Unbekannte x_m aus der n-ten Gleichung ausrechnen und in die andern einsetzen.

Das Element a_{nm} wird als Pivotelement, die Kolonne mit dem Index m als Pivotkolonne und die Zeile mit dem Index n als Pivotzeile bezeichnet. Wir erhalten durch die Substitution eine neue Matrix:

$$
\begin{array}{r|ccccc|}
 & x_1 & \dots & y_n & \dots & x_M \\
\hline
y_1 = & b_{11} & \dots & b_{1m} & \dots & b_{1M} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_m = & b_{n1} & \dots & b_{nm} & \dots & b_{nM} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_N = & b_{N1} & \dots & b_{Nm} & \dots & b_{NM} \\
\hline
\end{array}
$$

Man rechnet sich zuerst das Element $b_{nm} = 1/a_{nm}$ aus, was bekanntlich bei der «Curta» mit einer einzigen Einstellung im Einstellwerk möglich ist (Aufbaudivision)[3]). Die andern Elemente der Pivotzeile ergeben:

$$b_{nk} = -\,a_{nk}/a_{nm} = -\,a_{nk} \cdot b_{nm} \qquad k \neq m\,.$$

Die neue Zeile ist also durch eine einfache Multiplikation zu erhalten. Man pflegt diese Elemente unten an die ursprüngliche Matrix als sogenannte Kellerzeile anzuhängen. Aus den Elementen der Pivotkolonne ergeben sich ebenfalls mit einer einfachen Multiplikation:

$$b_{im} = a_{im}/a_{nm} = a_{im} \cdot b_{nm} \qquad i \neq n\,.$$

Die übrigen Elemente der Matrix b_{ik}, $i \neq n$, $k \neq m$ sind:

$$b_{ik} = a_{ik} - a_{im} \cdot a_{nk}/a_{nm} = a_{ik} + a_{im} \cdot b_{nk}$$

und lassen sich bequem mit einer Maschine rechnen, wenn die Elemente b_{nk} der Kellerzeile bekannt sind.

Falls die Elemente der Matrix a_{ik} fünf bedeutsame Ziffern nicht überschreiten, besteht die Möglichkeit, die b_{ik} mit einer «Curta II» nach folgendem Programm mit einem Minimum an Operationen zu berechnen:

Einstellwerk	Hebel	Zählwerk		Resultatwerk
00000 0 00000	↑	0 00000 00		0000 00000 0 00000
a_{ik} a_{im}		‖ ‖ ▽		
		‖ 1	—▷	a_{ik} a_{im}
00000		▽ ▽		
		0 b_{nk} 0	—▷	b_{ik} 0

[2]) Vergleiche dazu und für das Folgende: E. Stiefel, *Einführung in die numerische Mathematik* (Teubner, 1961), S. 11ff.

[3]) Vergleiche Anleitung zu «Curta» oder H. Schilt, *Programme für die Berechnung von Wurzeln, Polynomen und Potenzreihen mit Handrechenmaschinen.* Schweiz. Bauzeitung *76*, Heft 21 (1958).

Wie ersichtlich bleibt die Einstellung von $a_{i\,m}$ im Einstellwerk für alle Elemente einer Zeile bestehen. Diese Bequemlichkeit geht verloren, wenn mehr als fünf bedeutsame Ziffern vorliegen; die Matrixelemente lassen sich aber immer noch mit der «Curta» berechnen.

Bei vielen Algorithmen spielen Austauschschritte eine wesentliche Rolle, insbesondere kann man sie benutzen, um lineare Gleichungssysteme zu lösen (Gaußsches Eliminationsverfahren). Dazu vereinfachen wir unser Gleichungssystem:

$$y_i = 0 \quad \text{für alle} \quad i \quad \text{und} \quad x_{N+1} = x_M = 1$$

und erhalten:

$$\sum_k a_{i\,k}\, x_k + a_{i\,M} = 0\,.$$

Da die y_i null sind, vereinfacht sich die Matrix bei jedem Schritt um eine Zeile und um eine Kolonne. Nach $N-1$ Schritten hat man nur noch eine Zeile, aus der die eine Unbekannte bestimmbar ist. Jede Kellerzeile liefert dann durch Einsetzen der schon bekannten Grössen eine weitere Unbekannte.

Für $n \geqslant 2$ braucht es zum Auflösen eines inhomogenen Gleichungssystems mit n Unbekannten folgende Operationen:

	Additionen	Multiplikationen
Gaußscher Algorithmus	$n^3/3 + 2\,n/3 - 1$	$n^3/3 + n^2 - n/3 - 1$
Verfahren von JÄGER	$n - 1$	$2\,n^3/3 - n^2/2 - 7\,n/6$
und je n Divisionen		

Additionen von Produkten sind nicht gezählt, weil beim Maschinenrechnen die Produkte direkt addiert werden.

Das Verfahren von JÄGER benötigt mehr Multiplikationen als der Gaußsche Algorithmus und dürfte nur dann rationeller sein, wenn die Matrixelemente kleine ganze Zahlen sind.

Beispiel

$$\begin{array}{r|llll|lll}
\hline
y_1 = & +\,1{,}3854\,x_1 & +\,2{,}7182\,x_2 & +\,\underline{3{,}8354}\,x_3 & +\,2{,}5198 & & & \\
y_2 = & +\,2{,}8127\,x_1 & +\,4{,}8232\,x_2 & +\,\underline{5{,}2315}\,x_3 & +\,1{,}2738 & & & \\
y_3 = & +\,\underline{3{,}7321}\,x_1 & +\,\underline{2{,}9318}\,x_2 & +\,\underline{\underline{4{,}1239}}\,x_3 & +\,\underline{2{,}1843} & & & \\
\hline
\end{array}$$

$$x_3 = \; -\,0{,}90500\,x_1 \quad -\,0{,}71093\,x_2 \quad +\,\mathit{0{,}24249}\,y_3 \quad -\,0{,}52967 \;\longrightarrow\; x_3 = -\,\underline{\underline{1{,}9802}}$$

$$\begin{array}{r|lll|}
\hline
y_1 = & -\,2{,}0856\,x_1 & -\,\underline{0{,}00850}\,x_2 & +\,0{,}48830 \\
y_2 = & -\,\underline{1{,}9218}\,x_1 & +\,\underline{\underline{1{,}10397}}\,x_2 & -\,\underline{1{,}49717} \\
\hline
\end{array}$$

$$x_2 = \; +\,1{,}7408\,x_1 \quad +\,\mathit{0{,}90582}\,y_2 \quad +\,1{,}35617 \;\longrightarrow\; x_2 = \underline{\underline{1{,}7513}}$$

$$0 = y_1 = \boxed{-\,2{,}1004\,x_1 \qquad +\,0{,}47677} \;\longrightarrow\; x_1 = \underline{\underline{0{,}22699}}$$

Vorstehend geben wir noch ein Beispiel für die Bestimmung von drei Unbekannten; es wurde mit einer «Curta II» in weniger als 30 min fertig gerechnet. Der Deutlichkeit halber sind überall noch die Variablen hinzugefügt, und aus dem gleichen Grunde steht in der Kellerzeile auch das Element $b_{nm} y_n$ kursiv gedruckt, obwohl y_n null ist. Pivotelemente sind zweimal unterstrichen, Elemente der Pivotkolonne bzw. -zeile sind einfach unterstrichen. H. SCHILT, Biel

Ungelöste Probleme

Nr. 44. V. L. KLEE (Seattle, USA) ruft uns ein fesselndes, von H. BUSEMANN und C. M. PETTY[1]) stammendes Problem in Erinnerung, über das man beispielsweise im Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach gelegentlich diskutierte und um dessen Lösung sich auch der Unterzeichnete vergeblich bemühte. Es handelt sich um folgendes: Zwei eigentliche konzentrische Mittelpunktseikörper A und B des gewöhnlichen Raumes sollen die Eigenschaft aufweisen, dass für jede durch den gemeinsamen Mittelpunkt hindurchgehende Ebene E bezüglich der Schnittbereiche die Beziehung

$$f(A \cap E) \geq f(B \cap E) \tag{a}$$

gilt, wo f den Flächeninhalt bezeichnet. Ist es auf Grund dieser Sachlage möglich, für die Volumina der beiden Körper den Schluss

$$V(A) \geq V(B) \tag{b}$$

zu ziehen? Die Voraussetzung der Konvexität ist hierbei jedenfalls wesentlich. In der Tat hat L. DANZER zwei zentralsymmetrische nichtkonvexe Körper aufgewiesen, die der Voraussetzung (a) genügen, für die aber der plausible Schluss (b) falsch ist![2])

H. HADWIGER

Nachtrag zu Nr. 38

Von K. A. POST (TH Eindhoven, Nederland) ist uns ein Nachweis für das Bestehen des linksseitigen Teils der in Frage stehenden Ungleichung

$$k + 1 \leq n(A) \leq 2^k$$

zugestellt worden, wo $n(A)$ die kleinste Zahl von Blickpunkten im Aussenraum eines eigentlichen konvexen Körpers A des k-dimensionalen Raumes bezeichnet, die insgesamt eine vollständige Überblickung der Randfläche von A ermöglichen. Der Einsender zeigt, dass k Blickpunkte in keinem Fall ausreichen, und argumentiert wie folgt:

«Das Problem ändert sich nicht, wenn man die Blickpunkte im Unendlichen wählt, da die von einem Punkt p aus vollsichtbaren Punkte Q eine offene Menge bilden und es sich hier um endlich viele Punkte p_i handelt. Damit ein Punkt Q vollsichtbar sei aus der Richtung $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, soll notwendig die Ungleichung

$$p_1 b_1 + p_2 b_2 + \cdots + p_k b_k > 0 \tag{1}$$

[1]) Problems on convex bodies; Math. Scand. *4*, 88–94 (1956).

[2]) Erst während des Druckes dieser Notiz wurde die neuere Abhandlung von H. BUSEMANN: Volumes and areas of cross-sections; Amer. math. Monthly *67*, 248–250 (1960) bemerkt, die weitere Studien und überraschende Beispiele dieser Art enthält.