

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 17 (1962)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Ist die Funktion  $r = r(\varphi)$  nur in einem Intervall kleiner  $2\pi$  definiert, so gibt es evtl. weitere Lösungen:

$$a \leq \frac{\inf [-2r + r'' - \sqrt{r''^2 - 8r'^2}]}{2}.$$

Auch dies befriedigt unsere Aufgabe, wenn nur  $\text{Min}(r + a) > 0$  ist. (Ist die Kurve geschlossen, so hat  $r'$  eine Nullstelle, weshalb sich die Ungleichungen widersprechen.)

$r''$  sei nun nicht mehr beschränkt:

Ist  $\sup r'' < \infty$ , so lässt sich  $a$  aus (I) bestimmen, ist  $\sup r'' = \infty$ , so besitzt die Aufgabe keine Lösung. M. WEHRLI, Zürich

## Aufgaben

**Aufgabe 412.** Man beweise: Für das ganzwertige Polynom  $\binom{x}{n}^2$  vom Grad  $2n$  gilt die Darstellung

$$\binom{x}{n}^2 = \binom{n}{0} \binom{n}{0} \binom{x}{n} + \binom{n+1}{1} \binom{n}{1} \binom{x}{n+1} + \binom{n+2}{2} \binom{n}{2} \binom{x}{n+2} + \cdots + \binom{2n}{n} \binom{n}{n} \binom{x}{2n}.$$

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

1. *Lösung:* Denkt man sich  $x$  Dinge  $a_1, a_2, \dots, a_x$  und  $x$  Dinge  $b_1, b_2, \dots, b_x$ , so ist  $\binom{x}{n}$  die Anzahl der Kombinationen von je  $n$  aus diesem Vorrat genommenen  $a$  mit  $n$  Dingen  $b$ . Es sei  $C_{n+k}$  die Anzahl derjenigen unter diesen Kombinationen, in welchen genau  $n+k$  verschiedene Indizes auftreten ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Es gibt  $\binom{x}{n+k}$  derartige Indexmengen.

In jeder lassen sich die  $a$  noch auf  $\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}$  Arten auswählen. Unter den  $b$  müssen dann notwendig diejenigen (es sind genau  $k$ ) auftreten, deren Indizes in der betreffenden Indexmenge von den  $a$  nicht benützt wurden, während die  $n-k$  übrigen auf  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  Arten ausgewählt werden können. Hieraus folgt

$$C_{n+k} = \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} \binom{x}{n+k} \quad \text{und} \quad \binom{x}{n}^2 = \sum_{k=0}^n C_{n+k}.$$

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

2. *Lösung:* Aus  $\binom{n+k}{k} \binom{x}{n+k} = \binom{x}{n} \binom{x-n}{k}$  und der bekannten Identität

$$\binom{u+v}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{u}{k} \binom{v}{r-k}$$

folgt für  $u = x - n$  und  $v = r = n$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} \binom{x}{n+k} = \binom{x}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{x-n}{k} = \binom{x}{n}^2.$$

G. GEISE, Dresden; O. REUTTER, Ochsenhausen

Weitere Lösungen sandten L. CARLITZ (Durham/USA), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München).

**Aufgabe 413.** Gegeben ist eine Fläche zweiter Ordnung  $\Phi$  und zwei in bezug auf sie reziproke<sup>1)</sup> Polaren  $q, r$ . Man bestimme alle Flächen mit der Eigenschaft, dass die Tangentialebene in jedem Flächenpunkt  $P$  die Geraden  $q, r$  in zwei zu  $P$  konjugierten Punkten schneidet. C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

<sup>1)</sup> In der ursprünglichen Aufgabenstellung stand irrtümlich «konjugierte» Polaren.

*Lösung des Aufgabenstellers:* Die Erzeugenden der Fläche  $\Phi$ , welche  $q$  und  $r$  treffen, bilden ein Vierseit  $g_1, g_2, g_3, g_4$ . Für alle Quadriken des Büschels durch diese vier Geraden sind  $q$  und  $r$  reziproke Polaren. Die Polarebenen eines beliebigen Punktes  $P$  in bezug auf die Flächen des Büschels bilden ein Ebenenbüschel, dessen Achse  $q$  und  $r$ , etwa in  $Q$  und  $R$ , treffen muss. Denn unter den Flächen des Büschels befinden sich auch die Ebenenpaare  $g_1, g_2 \mid g_3, g_4$  und  $g_2, g_3 \mid g_4, g_1$ . Die Polarebene von  $P$  muss im einen Fall durch  $q$ , im andern durch  $r$  gehen.

$Q$  und  $R$  sind konjugiert zu  $P$  bezüglich  $\Phi$ . Für diejenige Quadrik des Büschels, die durch  $P$  geht, muss die Tangentialebene in  $P$  auch durch  $Q$  und  $R$  gehen. Die Quadriken des Büschels bilden also gerade die gesuchte Flächenschar.

**Aufgabe 414.** Jeder Ellipsenschnitt eines Drehzylinders geht bekanntlich bei Verebnung des Zylinders in eine Sinuslinie über. Welchen Winkel muss die schneidende Ebene mit der Zylinderachse einschliessen, damit der Schmiegekegelschnitt in einem Scheitel der verebneten Kurve eine gleichseitige Hyperbel ist? R. BEREIS, Dresden

*Lösung:* Ist  $r$  der Zylinderradius und  $\alpha$  der Winkel, den die Schnittebene mit der Zylinderachse einschliesst ( $r > 0, 0 < \alpha \leq \pi/2$ ), dann wird die verebnete Schnittkurve bei geeigneter Wahl eines cartesischen Koordinatensystems durch die Gleichung

$$y = f(x) = a \cos(\omega x) \quad \text{mit} \quad a = r \cot \alpha \quad \text{und} \quad \omega = \frac{1}{r}$$

dargestellt. Der Schmiegekegelschnitt im Scheitel  $(0 \mid a)$  dieser Kurve hat die Gleichung

$$-3 a^2 \omega^2 x^2 + y^2 - 8 a y + 7 a^2 = 0. \tag{*}$$

Man gewinnt (\*) aus dem Ansatz  $A x^2 + B y^2 + C x + D y + E = 0$  und aus den Schmiegebedingungen. Diese bestehen aus den Gleichungen  $F^{(n)}(0) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ), wobei

$$F(x) = A x^2 + B f^2(x) + C x + D f(x) + E.$$

Wählt man  $B = 1$ , so ergibt sich ein eindeutig lösbares System von Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten  $A, C, D, E$  mit dem obigen Ergebnis (\*). Auf die Darstellung des Rechenganges kann hier wegen seiner Einfachheit verzichtet werden.

Der Schmiegekegelschnitt ist also für  $a > 0$ , das heisst für  $0 < \alpha < \pi/2$ , in jedem Fall eine Hyperbel. Insbesondere ergibt sich genau dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn  $3 a^2 \omega^2 = 1$  ist, wenn also  $\cot^2 \alpha = 1/3$  und damit  $\alpha = \pi/3$  ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen (Deutschland)

Dieselbe Lösung sandte L. KIEFFER (Luxemburg). Weitere Lösungen gingen ein von C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht), G. GEISE (Dresden), W. JÄNICHE (Berlin) und H. MEILI (Winterthur).

**Aufgabe 415.** Show that

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{n}{r}^2 \frac{(n-2r)(n-2r-1)\dots(n-2k+1)}{(k-r)!(n-2r-1)(n-2r-2)\dots(n-k-r)} &= \\ &= \frac{n!}{k!k!(n-2k)!} \quad (2k \leq n). \end{aligned}$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham N. C., USA

*Solution by the Proposer:* We shall make use of the familiar formulas

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 (x+1)^r (x-1)^{n-r}, \tag{1}$$

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{2r \leq n} \frac{n!}{r!r!(n-2r)!} (x^2-1)^r (2x)^{n-2r}, \tag{2}$$

where  $P_n(x)$  is the Legendre polynomial of degree  $n$ . Also we shall require the identity

$$\left. \begin{aligned} \alpha^n + \beta^n &= \sum_{2r \leq n} (-1)^r \frac{n(n-1) \dots (n-2r+1)}{r!(n-1)(n-2) \dots (n-r)} (\alpha + \beta)^{n-2r} (\alpha\beta)^r \\ &= \sum_{2r \leq n} (-1)^r \frac{n(n-r-1)!}{r!(n-2r)!} (\alpha + \beta)^{n-2r} (\alpha\beta)^r \quad (n \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

We may rewrite (1) in the form

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum'_{2r \leq n} \binom{n}{r}^2 (x^2 - 1)^r ((x+1)^{n-2r} + (x-1)^{n-2r}),$$

where the prime indicates that when  $n$  is even the last term on the right is

$$\binom{n}{n/2}^2 (x^2 - 1)^{n/2}.$$

Thus, substituting from (3), we get

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 2^{-n} \sum_{2r \leq n} \binom{n}{r}^2 (x^2 - 1)^r \times \\ &\quad \times \sum_{2s \leq n-2r} (-1)^s \frac{1}{s!} \frac{(n-2r) \dots (n-2r-2s+1)}{(n-2r-1) \dots (n-2r-s)} (2x)^{n-2r-2s} (x^2 - 1)^s = \\ &= 2^{-n} \sum_{2k \leq n} (x^2 - 1)^k (2x)^{n-2k} \times \\ &\quad \times \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{n}{r}^2 \frac{1}{(k-r)!} \frac{(n-2r) \dots (n-2k+1)}{(n-2r-1) \dots (n-k-r)}. \end{aligned}$$

Comparing with (2) we immediately get the stated result.

**Aufgabe 416.** Ein Dreieck habe die Fläche  $\Delta_0$ . Verbindet man seine Ankreismittelpunkte, so entstehe ein Dreieck mit der Fläche  $\Delta_1$ . Wiederholt man dasselbe Verfahren bezüglich des neuen Dreiecks, so habe das entstehende Dreieck die Fläche  $\Delta_2$  usw. Es sei das Dreieck mit der Fläche  $\Delta_n$  homothetisch zu demjenigen mit der Fläche  $\Delta_n$  bei einer Charakteristik  $1:2^n$ . Man weise für das Grenzdreieck  $\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$  die Abschätzung

$$\Delta_0 \leq \Delta$$

nach.

F. LEUENBERGER, ZuoZ

*Lösung:* Wir verwenden für ein Dreieck und für seine Fläche dieselbe Bezeichnung. Da die Ecken von  $\Delta_0$  Höhenfusspunkte von  $\Delta_1$  sind, ist der Umkreis von  $\Delta_0$  Feuerbachkreis von  $\Delta_1$ , sein Radius also halb so gross wie der Umkreisradius von  $\Delta_1$ . Alle Dreiecke  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots, \Delta$  haben somit gleiche Umkreise. Sind  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  die Winkel von  $\Delta_n$ , so gilt

$$\alpha_1 = \frac{\beta_0 + \gamma_0}{2}, \quad \alpha_1 - \beta_1 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2}, \quad \alpha_n - \beta_n = (-2)^{-n} (\alpha_0 - \beta_0).$$

Hieraus folgt, dass  $\Delta$  gleichseitig ist und  $\Delta_0 \leq \Delta$ , wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, falls schon  $\Delta_0$  gleichseitig ist.

C. BINDSCHEDLER, Künsnacht

Die Tatsache, dass  $\Delta_n$  monoton wachsend gegen  $\Delta$  strebt, ergibt sich nach O. REUTER auf folgende Weise: Sind  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Winkel und  $R$  der Umkreisradius von  $\Delta_0$ , so ist wegen  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

$$\Delta_0 = 0,5 R^2 \sum_{i=1}^3 \sin 2\alpha_i \leq 0,5 R^2 \sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i = \Delta_1$$

und damit  $\Delta_n \leq \Delta_{n+1}$ .

Eine weitere Lösung sandte W. JÄNICHE (Berlin).



**Aufgabe 417.** Man beweise die folgende Umkehrung eines bekannten Satzes: Wenn der Schnittpunkt  $H$  der Ecktransversalen  $AA'$ ,  $BB'$  eines Dreiecks, die dessen Umkreis in  $A'$ ,  $B'$  zum zweiten Male treffen, die Eigenschaft hat, dass die Abschnitte  $\overline{A'H}$ ,  $\overline{B'H}$  von den Seiten  $BC$  resp.  $AC$  halbiert werden, und wenn  $H$  keine Ecke ist, so ist  $H$  der Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $ABC$ .  
C. BINDSCHEDLER, Künsnacht

*Lösung:*  $AA'$  schneide  $BC$  in  $P$ ,  $BB'$  jedoch  $AC$  in  $Q$ . Nach dem Sehnensatz gilt  $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'}$ , woraus die Voraussetzungen  $\overline{HP} = 0,5 \overline{HA'}$ ,  $\overline{HQ} = 0,5 \overline{HB'}$  sofort auf  $\overline{HA} \cdot \overline{HP} = \overline{HB} \cdot \overline{HQ}$  führen.  $ABPQ$  ist somit ein Sehnenviereck. Mit dem Peripheriewinkelsatz gewinnt man  $\sphericalangle QAH = \sphericalangle PBH$ ,  $\sphericalangle QAB' = \sphericalangle PBH$  also  $\sphericalangle QAH = \sphericalangle QAB'$ . Die Seitenhalbierende  $AQ$  im Dreieck  $HAB'$  ist somit auch Halbierende des Winkels  $HAB'$  und steht also auf  $HB'$  senkrecht. Das genügt zum Beweis.

F. LEUENBERGER, Meilen

Weitere Lösungen sandten B. BOLLOBÁS (Budapest), J. BREJCHA (Brno), R. DIESCHBOURG (Luxemburg), H. FRISCHKNECHT (Berneck), W. JÄNICHEN (Berlin), O. REUTTER (Ochsenhausen).

**Aufgabe 418.** Es sei  $[\alpha]$  die grösste ganze Zahl  $\leq \alpha$  und  $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ . Man weise nach, dass für  $0 \leq \xi \leq 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \left[ \left\{ \frac{x^2}{n} \right\} + \left\{ \frac{\xi x}{n} \right\} \right] = f(\xi)$$

existiert, und bestimme  $\text{Max}_{0 \leq \xi \leq 1} f(\xi)$

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

*Solution:* Clearly

$$\left[ \left\{ \frac{x^2}{n} \right\} + \left\{ \frac{\xi x}{n} \right\} \right] > 0$$

if and only if

$$\left[ \frac{x^2 + \xi x}{n} \right] > \left[ \frac{x^2}{n} \right] + \left[ \frac{\xi x}{n} \right]$$

and in this case we must have

$$\left[ \left\{ \frac{x^2}{n} \right\} + \left\{ \frac{\xi x}{n} \right\} \right] = 1.$$

It follows that

$$\sum_{n \leq x} \left[ \left\{ \frac{x^2}{n} \right\} + \left\{ \frac{\xi x}{n} \right\} \right] = \sum_{n \leq x} \left[ \frac{x^2 + \xi x}{n} \right] - \sum_{n \leq x} \left[ \frac{x^2}{n} \right] - \sum_{n \leq x} \left[ \frac{\xi x}{n} \right]. \quad (1)$$

Now

$$\begin{aligned} \sum_{m \mid n \leq x(x+\xi)} 1 &= \sum_{n \leq x} \left[ \frac{x^2 + \xi x}{n} \right] + \sum_{m \leq x+\xi} \left[ \frac{x^2 + \xi x}{m} \right] - [x][x+\xi] = \\ &= 2 \sum_{n \leq x} \left[ \frac{x^2 + \xi x}{n} \right] - \sum_{x < m < x+\xi} \left[ \frac{x^2 + \xi x}{m} \right] - [x][x+\xi]. \end{aligned}$$

If there is an integer  $m$  such that

$$x < m < x + \xi, \quad (2)$$

then

$$m = [x + \xi] = [x] + 1$$

and

$$x < \frac{x^2 + \xi x}{m} < x + \xi, \quad \left[ \frac{x^2 + \xi x}{m} \right] = [x + \xi] = m.$$

Thus

$$\begin{aligned} \sum_{x < m < x+\xi} \left[ \frac{x^2 + \xi x}{m} \right] - [x][x+\xi] &= m - m(m-1) \\ &= -(m-1)^2 + 1 \\ &= -[x]^2 + 1. \end{aligned}$$

If no integer satisfying (2) exists we get

$$\sum_{x < m < x + \xi} \left[ \frac{x^2 + \xi x}{m} \right] - [x][x + \xi] = -[x^2].$$

It follows that

$$2 \sum_{n \leq x} \left[ \frac{x^2 + \xi x}{n} \right] = x(x + \xi) \log x(x + \xi) + (2C - 1)x(x + \xi) - [x^2] + o(x), \quad (3)$$

where  $C$  is Euler's constant. In particular for  $\xi = 0$

$$2 \sum_{n \leq x} \left[ \frac{x^2}{n} \right] = x^2 \log x^2 + (2C - 1)x^2 - [x^2] + o(x). \quad (4)$$

In the next place

$$\sum_{n \leq x} \left[ \frac{\xi x}{n} \right] = \sum_{n \leq \xi x} \left[ \frac{\xi x}{n} \right] = \xi x \log \xi x + (2C - 1)\xi x + o(x). \quad (5)$$

Then by (1), (3), (4), (5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \left[ \left\{ \frac{x^2}{n} \right\} + \left\{ \frac{\xi x}{n} \right\} \right] &= \frac{1}{2}(x + \xi) \log x(x + \xi) + \left( C - \frac{1}{2} \right) (x + \xi) - \\ &- x \log x - \left( C - \frac{1}{2} \right) x - \xi \log \xi x - (2C - 1)\xi + o(1) = \\ &= (x + \xi) \log x + \frac{1}{2}(x + \xi) \log \left( 1 + \frac{\xi}{x} \right) - \\ &- x \log x - \xi \log x - \xi \log \xi - \left( C - \frac{1}{2} \right) \xi + o(1) = \\ &= (1 - C)\xi - \xi \log \xi + o(1). \end{aligned}$$

Therefore

$$f(\xi) = (1 - C)\xi - \xi \log \xi \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

The maximum is at  $\xi = e^{-C}$ :

$$f(e^{-C}) = e^{-C}.$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham N.C., U.S.A.

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 440.** Der Schleife der Strophoide

$$(x^2 + y^2)x = x^2 - y^2$$

ist eine Folge von sich der Reihe nach berührenden Kreisen  $K_1, K_2, K_3, \dots$  eingeschrieben.  $K_1$  ist Scheitelkrümmungskreis, während jeder andere die Kurve doppelt berührt. Diese Kreise schneiden die  $x$ -Achse in den Punkten mit den Abszissen  $a_1 (= 1), a_2, a_3, \dots$ . Man zeige, dass die  $a_i$  Stammbrüche sind und dass  $(3 - (-1)^n)/4a_n$  für jedes  $n$  das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

**Aufgabe 441.** Man bestimme  $\sin \vartheta \neq 1$  in den Vektoren

$$\mathbf{a} = (0, 0, 1), \quad \mathbf{b}_k = \left( \cos \vartheta \cos 2\pi \frac{k}{5}, \cos \vartheta \sin 2\pi \frac{k}{5}, \sin \vartheta \right) \quad (k = 0, 1, \dots, 4)$$

so, dass  $\mathbf{a} \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1$  wird. Man zeige, dass unter den Skalarprodukten der 12 Vektoren  $\pm \mathbf{a}, \pm \mathbf{b}_k$  dann nur die Werte  $\pm 1, \pm \mathbf{a}_0 \mathbf{b}_1$  vorkommen. Daraus leite man die Existenz von je 60 geraden und ungeraden Bewegungen her, die diese 12 Vektoren untereinander vertauschen, also die Existenz des regulären Ikosaeders und seiner Gruppe.

H. LENZ, München

**Aufgabe 442.** Es sei  $p$  eine Primzahl der Form  $8k + 7$ . Von den quadratischen Resten mod  $p$  werden die absolut kleinsten Reste mod  $p$  gebildet. Man beweise, dass ihre Summe Null ergibt.

J. SURÁNYI, Budapest

**Aufgabe 443.** Unter einem Fermattripel verstehen wir drei der Grösse nach geordnete teilerfremde natürliche Zahlen  $x, y, z$ , die einer der Gleichungen  $x^n + y^n = z^n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) genügen. Man zeige, dass genau ein Fermattripel eine arithmetische Folge erster Ordnung bildet.

E. TROST, Zürich

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Eine Walze und ein symmetrischer Doppeldrehkegel haben dieselbe Höhe  $h$ , gleiches Volumen und gleiche Oberfläche. Man bestimme ihre Radien, Oberfläche und Volumen.

$$\blacktriangleright x = \frac{1 + \sqrt{3}}{8} h; \quad y = \frac{\sqrt{3} + 3}{8} h; \quad F = \pi \frac{6 + 5\sqrt{3}}{16} h^2; \quad V = \pi \frac{2 + \sqrt{3}}{32} h^3.$$

2. Von zwei konzentrischen, kongruenten gleichseitigen Hyperbeln geht die eine aus der anderen durch eine Drehung um den Winkel  $\alpha$  hervor. Unter welchem Winkel schneiden sie sich?

$$\blacktriangleright 2\alpha.$$

3. Gegeben sind zwei Kreise mit den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$ . Die Geraden, die aus den beiden Kreisen gleiche Sehnen schneiden, sind Tangenten an eine Parabel.

$\blacktriangleright$  Die Potenzlinie der beiden Kreise ist Scheiteltangente, der Mittelpunkt der Strecke  $M_1M_2$  ist Brennpunkt.

4. Gegeben sind zwei Punkte  $A, B$  und zwei Geraden  $p, q$ . Man bestimme den geometrischen Ort des Mittelpunktes der Hyperbel durch  $A$  und  $B$ , deren Asymptoten parallel  $p$  und  $q$  sind.

$\blacktriangleright$  Jede Hyperbelsekante durch  $A$  und  $B$  trägt zwischen Kurve und Asymptoten gleiche Strecken. Zu jeder Wahl dieser Strecken gibt es ein Asymptotenpaar, dessen Schnittpunkt auf einer Gerade durch die Mitte der Sehne  $AB$  liegt.

5. Man betrachtet ein Tetraeder  $ABCS$  und seine Inkugel. Klappt man die Seitenflächen nach innen in die Ebene  $ABC$  um, so liegen die Umklappungen der drei Berührungspunkte im Berührungspunkt der Grundfläche, und dieser Punkt ist Umkreismittelpunkt des Dreiecks, dessen Ecken die drei Umklappungen von  $S$  sind.

$\blacktriangleright$  Zum zweiten Teil der Behauptung: Die Strecken von  $S$  zu den Berührungspunkten sind im Raume gleich, also auch in der Umklappung.

Der Satz lässt sich auf eine beliebige Pyramide ausdehnen: Besitzt eine  $n$ -seitige Pyramide eine Inkugel, so liegen die nach innen ausgeführten Umklappungen der Spitze in die Ebene der Grundfläche auf einem Kreis.

## Internationaler Mathematikerkongress

Stockholm, 15.–22. August 1962

In der Reihe der alle vier Jahre stattfindenden «grossen» internationalen Mathematikerkongresse wird derjenige von Stockholm als eine besonders glanzvolle Veranstaltung in der Erinnerung der Teilnehmer weiterleben. Schon rein äusserlich stellt die Stockholmer