

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1963)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

**Aufgabe 427.** Man gebe eine Bedingung dafür an, dass vier nicht in einer Geraden liegende Punkte einer Bildebene  $E$  die Normalrisse der Ecken eines regulären Tetraeders sind.

R. BEREIS, Dresden

*1. Lösung.* Die Ecken des Tetraeders im Raum seien durch die Ortsvektoren  $A, B, C, D$  in einem kartesischen Normalkoordinatensystem beschrieben. Erinnt man sich dann jener bekannten Beziehung zwischen einem Würfel und dem ihm einbeschriebenen regulären Tetraeder, so ist evident, dass folgende Vektoren gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen (Gemeinlote je zweier Gegenseiten):

$$P = \frac{A+B}{2} - \frac{C+D}{2}, \quad Q = \frac{A+C}{2} - \frac{B+D}{2}, \quad R = \frac{A+D}{2} - \frac{B+C}{2}.$$

Wird die Bildebene als Gaußsche Zahlenebene aufgefasst und werden mit  $A, B, C, D$  auch die Normalrisse der Eckpunkte des Tetraeders bezeichnet, so ergibt sich die gesuchte Bedingung aus dem bekannten Satz von GAUSS (vgl. etwa W. BLASCHKE, Analytische Geometrie, S. 158, Verlag Birkhäuser, Basel 1954)

$$0 = P^2 + Q^2 + R^2$$

oder nach kurzer Umformung:

$$(A+B+C+D)^2 = 4(A^2+B^2+C^2+D^2).$$

G. GEISE, Dresden

*2. Lösung. Vorbetrachtung.* Ohne Beschränkung der Annahme kann irgendeine der vier Ecken als Koordinatenursprung von  $E$  aufgefasst werden. Die Ortsvektoren von  $O$  zu den übrigen Ecken bilden dann ein System aus drei gleichlangen Vektoren, von denen je zwei einen Winkel von  $\pi/3$  miteinander bilden.

*Verallgemeinerte Aufgabenstellung.* Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass drei Punkte einer Bildebene  $E$  die Normalrisse der Endpunkte dreier Ortsvektoren  $v_1, v_2, v_3$  im dreidimensionalen Raume sind, die alle die gleiche Länge  $r$  besitzen und von denen je zwei den Winkel  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 2\pi/3$ ) miteinander bilden.

*Lösung:* Die Aufgabe lässt sich unmittelbar auf einen bekannten Satz von GAUSS zurückführen, der sich als Spezialfall unserer Aufgabe für  $\alpha = \pi/2$  ergibt. Die Lösung hierfür wird durch die folgenden beiden Gleichungen gegeben, wobei die Normalrisse in  $E$  durch die komplexen Zahlen  $z_1, z_2, z_3$  festgelegt sind (siehe das Zitat in der ersten Lösung):

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \tag{1}$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2r^2. \tag{2}$$

Aus  $v_1, v_2, v_3$  bilde man durch Linearkombination ein rechtwinkliges Dreibein (bekanntes Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren) von Vektoren  $e_1, e_2, e_3$  der Länge  $r$ ; z.B. ergibt sich mit  $\cos \alpha = \varphi$ :

$$e_1 = v_1, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}} (v_2 - \varphi v_1),$$

$$e_3 = \sqrt{\frac{1+\varphi}{1+\varphi-2\varphi^2}} \left[ -\frac{\varphi}{1+\varphi} v_1 - \frac{\varphi}{1+\varphi} v_2 + v_3 \right].$$

Werden nun die Projektionen der Vektoren  $e_i$  entsprechend zu oben durch die komplexen Zahlen  $w_i$  gekennzeichnet, so folgt sofort:

$$z_1 = w_1, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}} (w_2 - \varphi w_1),$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{1+\varphi}{1+\varphi-2\varphi^2}} \left[ -\frac{\varphi}{1+\varphi} w_1 - \frac{\varphi}{1+\varphi} w_2 + w_3 \right].$$

Die elementare Ausrechnung von (1) und (2) liefert schliesslich die gesuchten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Projektionen  $w_1, w_2, w_3$ :

$$(1 + 2 \cos \alpha) (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - \cos \alpha (w_1 + w_2 + w_3)^2 = 0$$

$$(1 + 2 \cos \alpha) (|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2) - \cos \alpha |w_1 + w_2 + w_3|^2 = (1 + \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha) 2 r^2$$

Bei vorgegebenen  $w_i$  errechnet man hieraus  $\alpha$  und  $r$ . Für den Spezialfall der Aufgabe 427 wird mit  $\cos \alpha = 1/2$ :

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - \frac{1}{4} (w_1 + w_2 + w_3)^2 = 0$$

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2 - \frac{1}{4} |w_1 + w_2 + w_3|^2 = r^2.$$

*Bemerkung.* Nach dem dargestellten Vorgehen ergibt sich auf die gleiche einfache Weise als Verallgemeinerung eines Satzes von POHLKE die Lösung des betrachteten Problems im Falle einer schrägen Parallelprojektion. P. H. MÜLLER, Dresden

3. *Lösung.* In einem – sonst beliebigen – orthonormierten kartesischen  $xyz$ -Koordinatensystem seien die 4 Tetraederecken  $A, B, C, D = (0 \ 0 \ 0), (a_{11} \ a_{12} \ a_{13}), (a_{21} \ a_{22} \ a_{23}), (a_{31} \ a_{32} \ a_{33})$  und  $E$  die  $xy$ -Ebene. Dann gilt, wenn  $L_3$  die Länge einer Kante dieses regulären Tetraeders ist:

$$L_3^2 = 2 (a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + a_{3k}^2) - \frac{2}{4} (a_{1k} + a_{2k} + a_{3k})^2 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Das sind drei gleichberechtigte Bedingungen, davon zwei in  $E$ .

Beispiel:  $A, B, C, D = (0 \ 0 \ 0), (2 \ 0 \ 0), (1 \ \sqrt{3} \ 0), (1 \ \sqrt{1/3} \ \sqrt{8/3})$ , wo also  $L_3 = 2$  ist.

*Beweis.* Im  $n$ -dimensionalen Raum gilt analog

$$L_n^2 = 2 (a_{1k}^2 + \dots + a_{nk}^2) - \frac{2}{n+1} (a_{1k} + \dots + a_{nk})^2 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1)$$

wenn  $A_0, A_1, \dots, A_n = (0 \dots 0), (a_{11} \dots a_{1n}), \dots, (a_{n1} \dots a_{nn})$  die  $n+1$  Ecken des regulären Simplex sind; vgl. Jber. DMV 63 (1960) S. 18–19, Aufg. 381 von PAASCHE, Lösungen von LAUFFER und SPECHT. Die 2- und  $n$ -dimensionale Lösung von PAASCHE siehe Praxis der Math. 4 (1962) S. 63–65. Das 2-dimensionale Problem stammt von FAHRENHOLZ: Archimedes 11 (1959) S. 106, Aufg. 614. Das  $n$ -dimensionale Problem stellte und löste PAASCHE 1952 und sandte es 1954 an LAMBACHER, der dann aber als MNU-Redaktor ausschied. Es soll eine einfache Lösung von WIELANDT existieren, der über LÖBEL von der Aufgabe hörte.

*Zusatz.* Wegen des Pythagoras  $L_n^2 = A_k^2 = (A_i - A_j)^2, i, j, k - 1 = 0, 1, \dots, n - 1$  ( $i \neq j$ ) gilt die Identität in  $t$

$$n L_n^2 = \sum_{k=1}^n \left[ t (a_{1k}^2 + \dots + a_{nk}^2) - \frac{2t-2}{n+1} (a_{1k} + \dots + a_{nk})^2 \right].$$

Für  $t = 2$  entstehen rechts lauter gleiche Summanden (1). Für beliebige  $t$ , also auch für  $t = 1$ , ergibt sich die Summe der Quadrate aller Kanten  $L_n$ , die durch eine feste Simplexecke gehen:

$$\binom{n}{1} L_n^2 = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ik}^2 \right).$$

Für  $t = 0$  kommt die Quadratsumme aller Simplexkanten  $L_n$ :

$$\binom{n+1}{2} L_n^2 = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ik} \right)^2.$$

I. PAASCHE, MÜNCHEN

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin) und H. MEILI (Winterthur).

**Aufgabe 428.** Eine variable Parallele zur  $x$ -Achse trifft die Bernoullische Lemniskate  $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$  in vier Punkten, von denen je zwei mit dem Doppelpunkt der Kurve ein Dreieck bestimmen. Vier von diesen sechs Dreiecken sind im allgemeinen nicht gleichschenkelig. Man ermittle den geometrischen Ort für die Umkreismittelpunkte dieser vier Dreiecke.  
C. BINDSCHIEDLER, Künsnacht

1. *Lösung.* Es seien  $P_1(u_1, v)$ ,  $P_2(u_2, v)$  zwei Schnittpunkte der Geraden  $y = v$  mit der Lemniskate, wobei  $u_1 + u_2 \neq 0$  und  $0 < v \leq a \sqrt{2}/4$  vorausgesetzt werde. Sind  $x, y$  die Koordinaten des Umkreismittelpunktes des Dreiecks  $OP_1P_2$ , so gilt

$$(x - u_1)^2 + (y - v)^2 = x^2 + y^2 = (x - u_2)^2 + (y - v)^2.$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad y = \frac{v^2 - u_1 u_2}{2v}. \quad (1)$$

Aus der Lemniskatengleichung ergibt sich mit dem Satz von Vieta wegen  $u_1 + u_2 \neq 0$

$$u_1^2 + u_2^2 = a^2 - 2v^2, \quad u_1 u_2 = v \sqrt{a^2 + v^2}. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man

$$4x^2 = a^2 - 2v^2 + 2v \sqrt{a^2 + v^2}, \quad 4y^2 = a^2 + 2v^2 - 2v \sqrt{a^2 + v^2}. \quad (3)$$

Die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes ist somit

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}. \quad (4)$$

Untersucht man die Funktion (3), so sieht man, dass  $a^2/4 > y^2 \geq a^2/8$  gilt, falls  $v$  im oben angegebenen Intervall liegt. Von dem durch die Lemniskatenpunkte mit horizontaler Tangente gehenden Kreis (4) kommen also nur die ausserhalb der Lemniskate liegenden Bogen für den geometrischen Ort in Betracht.

Lösungen ähnlicher Art sandten J. BREJCHA (Brno), H. FRISCHKNECHT (Berneck), W. JÄNICHEN (Berlin), H. MEILI (Winterthur), R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England).

2. *Lösung.* Macht man bei festem  $y = y_0 \neq 0$  den Ansatz

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2 (x^2 - y^2) = (x^2 + y^2 - 2rx - 2sy)(x^2 + y^2 + 2rx - 2sy), \quad (1)$$

wo  $r, s$  Unbestimmte sind, so erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$a^2 = 4(r^2 + sy), \quad a^2 = 4(s^2 - sy)$$

und hieraus sofort  $r^2 + s^2 = a^2/2$ . Für die Schnittpunkte von  $y = y_0$  mit der Lemniskate verschwindet die linke Seite von (1) und damit (wegen  $y_0 \neq 0$ ) genau einer der Faktoren auf der rechten Seite. Das sind aber Gleichungen von Kreisen durch den Ursprung, die den Mittelpunkt  $(r, s)$  oder  $(r, -s)$  haben.

Lösungen von diesem Typus sandten G. GEISE (Dresden), G. UNGER (Dornach) und der Aufgabensteller.

3. *Lösung.* a) Da die Lemniskate Fusspunktskurve (aus  $O$ ) der gleichseitigen Hyperbel  $x^2 - y^2 = a^2$  [mit dem Brennpunkt  $F(a\sqrt{2}, 0)$ ] ist, schneiden sich zwei Hyperbeltangenten  $p, q$  durch die Lemniskatenpunkte  $P, Q$  im zu  $O$  diametralen Punkt  $O'$  des Umkreises  $k$  des Dreiecks  $OPQ$ . Diese Tangenten schneiden den Hauptkreis  $x^2 + y^2 = a^2$  in dessen Treffpunkten  $P', Q'$  mit dem Thaleskreis  $t$  über  $\overline{FO'}$ .  $t$  schneide  $OF$  in  $H$  und  $OO'$  in  $G$ .  $H$  liegt wegen  $\angle OHO' = 90^\circ$  auch auf  $k$ .

b) Die Kreisvierecke  $OPQH$  und  $GP'Q'H$  haben denselben Winkel, weil die Peripheriewinkel über  $OP, PQ, QH$  in  $k$  gleich denen über  $GP', P'Q', Q'H$  in  $t$  sind.

c) Die Vierecke sind gleichschenkelige Trapeze, wenn  $PQ$  parallel zur  $x$ -Achse ist (und  $P, Q$  – nach Voraussetzung – nicht symmetrisch zur  $y$ -Achse sind). Wegen  $\overline{OP'} = \overline{OQ'}$  ist dann  $\overline{OG} = \overline{OH}$ .

d) Vermöge des Kreises  $t$  ist dann aber  $\overline{OO'} = \overline{OF}$ . Somit liegt der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks  $OPQ$  auf dem Kreis mit dem Radius  $\overline{OF}/2 = a/\sqrt{2}$  um  $O$ .

G. UNGER, Dornach

D. GIOKAS (Athen) betrachtet die Lemniskate als inverse Figur der gleichseitigen Hyperbel  $H$ . Ist  $(C)$  die Schar der Kreise, die die Hauptachse von  $H$  in  $O$  berühren, so hüllen die gemeinsamen Sehnen von  $C$  und  $H$ , die nicht zur Achse parallel sind, den Kreis vom Radius  $c/2$  ein, wo  $2c$  die Fokaldistanz der Hyperbel ist. Auf diesen Sachverhalt weist auch G. UNGER hin.

Weitere Lösungen sandten J. BASILE (Brüssel) und F. BACHMANN (Zürich).

**Aufgabe 429.** Eine Ellipse mit gegebenem Achsenverhältnis  $b : a = \beta$  und festem Mittelpunkt, aber mit nach Grösse und Richtung veränderlichen Achsen, berührt beständig zwei gegebene Parallelen im Abstand  $d$  vom Mittelpunkt. Man bestimme die beiden Ränder des Gebietes, das von der Ellipse überstrichen wird (Envelope der Schar im engeren Sinne).  
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

*Lösung des Aufgabenstellers:* In der Gaußschen Zahlenebene, deren  $y$ -Achse die Mittelparallele der gegebenen Parallelen ist, sei  $z = d (\cos \varphi + \beta i \sin \varphi)$  die Parameterdarstellung der Ellipse in der Ausgangslage. Durch eine Drehstreckung  $(\lambda, \vartheta)$  geht sie über in

$$z = \lambda d (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) (\cos \varphi + \beta i \sin \varphi).$$

Soll die Ellipse die Gerade  $R(z) = d$  berühren, so müssen zwei Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  der gonio-metrischen Gleichung

$$\lambda (\cos \varphi \cos \vartheta - \beta \sin \varphi \sin \vartheta) - 1 = 0$$

zusammenfallen. Daraus ergibt sich

$$\lambda^2 = \frac{1}{\cos^2 \vartheta + \beta^2 \sin^2 \vartheta}$$

und

$$\sin \varphi_0 = \pm \frac{\beta \sin \vartheta}{\sqrt{\cos^2 \vartheta + \beta^2 \sin^2 \vartheta}}, \quad \cos \varphi_0 = \mp \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{\cos^2 \vartheta + \beta^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Ist  $P$  der Berührungspunkt mit  $x = d$ ,  $Q$  der Berührungspunkt mit der gesuchten Envelope, so muss die Tangente in  $Q$  mit  $OQ$  einen gleichsinnig gleichen Winkel einschliessen wie die Tangente in  $P$  mit  $OP$  (infinitesimale Drehstreckung der Ellipse). Für die exzentrische Anomalie  $\varphi^*$  von  $Q$  gilt dann  $\varphi^* = 90^\circ - \varphi_0$  oder  $= 270^\circ - \varphi_0$  (Denn für die Endpunkte konjugierter Halbmesser sind die betreffenden Winkel gegensinnig gleich; die Spiegelung eines solchen Halbmessers an einer Achse führt zu gleichsinnig gleichen Winkeln.) Damit erhält man als Parameterdarstellung der Envelope

$$z = \pm \lambda d (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) (\sin \varphi_0 + \beta i \cos \varphi_0) = \pm \frac{\beta d (-\sin 2 \vartheta + i \cos 2 \vartheta)}{\cos^2 \vartheta + \beta^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (*)$$

Das sind zwei kongruente Ellipsen  $E_1, E_2$ , die die gegebenen Parallelen berühren und den Ursprung zum Brennpunkt haben. Mit

$$\cos^2 \vartheta + \beta^2 \sin^2 \vartheta = \frac{1}{2} [1 + \beta^2 + (1 - \beta^2) \cos 2 \vartheta]$$

folgt nämlich aus (\*)

$$r = |z| = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos 2 \vartheta}, \quad \text{wo } p = \frac{2 \beta d}{1 + \beta^2} \quad \text{und } \varepsilon = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}.$$

Das ist die Polargleichung einer Ellipse mit den Halbachsen  $d$  und  $d(1 + \beta^2)/2\beta$ . Der äussere Rand des überstrichenen Gebietes besteht also aus zwei Stücken jener Parallelen von der Länge  $d(1 - \beta^2)/\beta$  und je einer anschliessenden Hälfte von  $E_1$  und  $E_2$ . Der innere Rand begrenzt das den Ellipsen  $E_1, E_2$  gemeinsame Flächenstück.

Eine synthetische Lösung legte G. UNGER (Dornach) vor. Er betrachtet die Schar ähnlicher Ellipsen, die einen festen Durchmesser  $QR$  gemeinsam haben. Die beiden gleichlangen konjugierten Durchmesser dieser Ellipsen schliessen denselben (spitzen) Winkel  $\gamma$  ein. Mit elementaren Involutionssätzen wird gezeigt, dass jede Ellipse der Schar die beiden zu  $\gamma$  gehörenden Fasskreise über  $QR$  berührt. Das polarreziproke Bild dieser Figur bezüglich des Kreises, der  $QR$  als Durchmesser hat, ist die Lösung der Aufgabe.

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 453.** Démontrer qu'il existe pour tout nombre naturel  $n$  un polynôme  $f(x)$  aux coefficients entiers tel que chacun des nombres  $f(1), f(2), \dots, f(n)$  est premier et que  $(1) < f(2) < \dots < f(n)$ .  
W. SIERPIŃSKI, Varsovie

**Aufgabe 454.** Die Ecktransversalen durch einen beliebigen inneren Punkt  $X$  eines  $n$ -dimensionalen Simplex  $S(A_1, \dots, A_{n+1})$  schneiden die gegenüberliegenden Grenzläume von  $S$  in den Punkten  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ), die das  $n$ -dimensionale Teilsimplex  $S(Y_1, \dots, Y_{n+1})$  aufspannen. Bedeuten  $V$  und  $\bar{V}$  die Inhalte von  $S$  und  $S$  und ist ferner  $A_i X = R_i$  und  $\bar{X} \bar{Y}_i = S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ), dann gilt

$$\bar{V} = n V \prod_{i=1}^{n+1} \frac{S_i}{R_i} \leq \frac{V}{n^n}.$$

$\bar{V}$  nimmt den Maximalwert  $V/n^n$  genau dann an, wenn  $X$  der Schwerpunkt von  $S$  ist.  
O. REUTTER, Ochsenhausen/Deutschland

**Aufgabe 455.** Eine Folge von Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ist gegeben durch die Rekursionsformel

$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 8$$

und die Anfangsglieder  $a_1 = 1, a_2 = 3$ . Man berechne  $a_n$  als Funktion von  $n$  und zeige, dass  $a_n + (-1)^n$  das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

**Aufgabe 456.** a) Gegeben sind zwei Punkte  $A, B$  und eine Gerade  $g$ , welche die Strecke  $AB$  schneidet. Gesucht wird der Kreis durch  $A$  und  $B$ , der  $g$  unter minimalem Winkel schneidet.

b) Gegeben sind ein Kreis  $K$  und eine Gerade  $g$ , welche die Ebene von  $K$  innerhalb  $K$  schneidet. Gesucht werden die beiden Kugeln durch  $K$ , welche  $g$  unter minimalem und unter maximalem Winkel schneiden.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Die drei Geraden

$$y = (2 + \sqrt{3})x + u,$$

$$y = (2 - \sqrt{3})x + v,$$

$$y = w - x$$

bestimmen ein gleichseitiges Dreieck.

2. Man betrachtet ein Quadrat  $ABCD$  und einen beliebigen konzentrischen Kreis. Für jeden Punkt  $P$  des Kreises gilt

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = \text{konst.},$$

$$\overline{PA}^4 + \overline{PB}^4 + \overline{PC}^4 + \overline{PD}^4 = \text{konst.}$$

► Ist  $a$  die halbe Diagonale des Quadrates und  $r$  der Radius des Kreises, so lauten die beiden Konstanten

$$4(r^2 + a^2) \quad \text{und} \quad 4(r^4 + 4r^2 a^2 + a^4).$$

3. Bestimme den Mittelpunkt  $M(p; q)$  des Kreises  $x^2 - 2p x + y^2 - 2q y = 0$  so, dass durch die Schnittpunkte mit dem festen Kreis  $x = 2 \cos \varphi$ ,  $y = 2 \sin \varphi$  die Lösungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der Gleichung  $a \cos \varphi + b \sin \varphi = 1$  bestimmt werden. (Stechzirkelnomogramm für die Gleichung  $a \cos \varphi + b \sin \varphi = 1$ )

►  $p = a$ ,  $q = b$ .

4. Bestimme den Mittelpunkt  $M(p; q)$  des Kreises

$$x^2 + y^2 - 2p x - 2q y - t^2 + 2q t = 0$$

so, dass seine Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse die Gleichung  $x^2 + a x + b = 0$  lösen. (Stechzirkelnomogramm für die Gleichung  $x^2 + a x + b = 0$ .)

► Alle Kreise gehen durch den Fixpunkt  $F(0; t)$ ,  $t > 0$  ist beliebig wählbar.

$$p = -\frac{a}{2}, \quad q = \frac{b + t^2}{2t}.$$

5. Bestimme den Mittelpunkt  $M(p; q)$  des Kreises  $x^2 - 2p x + y^2 - 2q y = 0$  so, dass die Schnittpunkte mit der festen Parabel  $y = \lambda x^2$  durch die Gleichung  $x^3 + a x + b = 0$  bestimmt werden. (Stechzirkelnomogramm für die Gleichung  $x^3 + a x + b = 0$ .)

► Alle Kreise gehen durch den Ursprung,  $\lambda > 0$  ist beliebig wählbar.

$$p = -\frac{b \lambda^2}{2}, \quad q = \frac{1 - a \lambda^2}{2 \lambda}.$$

## Literaturüberschau

*Elements of Algebra.* Von CALVIN A. ROGERS. 320 Seiten mit 78 Figuren. 45s. John Wiley & Sons Ltd., London und New York 1962.

Das Buch ist für einen einsemestrigen College-Kurs bestimmt und setzt nur die einfachsten arithmetischen Kenntnisse voraus. Will man nur die elementaren algebraischen Operationen sowie die Elemente der graphischen Darstellung lernen, so kann man die Lektüre auf die letzten zwei Drittel des Buches beschränken. Die durch viele Beispiele und Übungsaufgaben bereicherte Darstellung ist sehr ausführlich und sorgfältig.

Das erste Drittel des Buches ist besonders im Hinblick auf die nun auch bei uns in Gang gekommenen Bestrebungen für eine Modernisierung des mathematischen Unterrichtes interessant. Ausgehend vom naiven Mengenbegriff, betrachtet der Verfasser hier allgemeine Systeme mit einer bzw. mit zwei Verknüpfungsoperationen, die sich in bekannter Weise mit der Vereinigungsmenge und dem Durchschnitt anschaulich deuten lassen. Der Leser lernt dank der auch hier sehr geschickten Darstellung leicht den Begriff der Gruppe sowie die Boolesche Algebra kennen, wobei auch der Zusammenhang mit der Schaltalgebra gezeigt wird. Auch dieser Teil enthält viele Übungen. E. TROST

*Higher Algebra for the Undergraduate.* Von M. J. WEISS. Zweite Auflage revidiert von R. DUBISCH. 171 Seiten. J. Wiley & Sons, New York und London 1962.

Die Grundlagen für ein Studium der modernen Algebra sind in diesem Buch auf sehr ansprechende und übersichtliche Weise dargestellt. In neun Kapiteln werden folgende Gebiete behandelt: Die ganzen Zahlen (zahletheoretische Grundbegriffe). Rationale, reelle und komplexe Zahlen (Satz von Moivre, Einheitswurzeln). Elemente der Gruppentheorie (Grundbegriffe, Permutationsgruppen, Satz von CALEY). Ringe, Integritätsbereiche und Körper. Polynome über einem Körper. Vektoren und Matrizen. Systeme linearer Gleichungen. Determinanten und Matrizen (Charakteristische Gleichung, Satz von CAYLEY-HAMILTON). Gruppen, Ringe und Körper. Zahlreiche Übungsaufgaben ermöglichen eine Kontrolle des Verständnisses. E. TROST