

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1963)
Heft: 4

Artikel: Remarque sur les nombres parfaits pairs de la forme [Formel]
Autor: Rotkiewicz, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-22640>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

bei beliebigen *Schraubflächen*, auf denen sich für gewöhnlich ausgezeichnete Schraublinien (also Gewindekurven) finden lassen, die Schmieglinien der Fläche sind: es sind dies jene Schraublinien, längs welchen der Schraubfläche eine Wendelfläche berührend angeschrieben werden kann.

W. WUNDERLICH (Wien)

Sur une propriété des progressions arithmétiques

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME: *s étant un nombre naturel et*

$$a_i + b_i, \quad 2 a_i + b_i, \quad 3 a_i + b_i, \dots \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (1)$$

étant s progressions arithmétiques infinies, ou a_i et b_i ($i = 1, 2, \dots, s$) sont des entiers positifs, s'il existe un nombre premier qui appartient à chacune de ces s progressions arithmétiques, il existe une infinité de tels nombres premiers.

Démonstration: Soit p un nombre premier qui appartient à chacune des progressions arithmétiques (1). Il existe donc pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq s$ un nombre naturel k_i tel que $p = k_i a_i + b_i$ pour $i = 1, 2, \dots, s$. Les nombres k_i, a_i et b_i (où $i = 1, 2, \dots, s$) étant naturels, il en résulte que $p > a_i$ pour $i = 1, 2, \dots, s$, donc $(a_i, p) = 1$ pour $i = 1, 2, \dots, s$, d'où $(a_1 a_2 \dots a_s, p) = 1$ et, d'après le théorème de LEJEUNE DIRICHLET sur la progression arithmétique, il existe une infinité de nombres premiers dans la progression arithmétique

$$a_1 a_2 \dots a_s k + p. \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Soit i un nombre naturel, tel que $i \leq s$. Comme $p = k_i a_i + b_i$, on a pour k naturels

$$a_1 a_2 \dots a_s k + p = a_1 a_2 \dots a_s k + k_i a_i + b_i = a_i t + b_i,$$

où $t = a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_s k + k_i$ est un nombre naturel. Cela prouve que tout terme de la progression arithmétique (2) est un terme de chacune des s progressions (1). Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Quant au théorème de LEJEUNE DIRICHLET sur la progression arithmétique, il est à remarquer que j'ai démontré en 1950¹⁾ qu'il peut être déduit sans peine de la proposition (plus faible) que dans toute progression arithmétique $a k + b$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), où a et b sont des nombres naturels premiers entre eux, il existe au moins *un* nombre premier.

W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

Remarque sur les nombres parfaits pairs de la forme $a^n \pm b^n$

M. A. MAKOWSKI a démontré dans sa note²⁾ que 28 est le seul nombre parfait pair de la forme $x^3 + 1$ et qu'il n'existe pas de nombres parfaits pairs de la forme $n^{\dots n} + 1$, où le nombre n figure plus que deux fois. Dans la note présente je démontrerai les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Il n'existe aucun nombre parfait pair de la forme $a^n - b^n$, où a et b sont des entiers positifs premiers entre eux et n est un entier > 2 .*

¹⁾ Voir mon livre *Teoria Liczb* (en polonais), Monografie Matematyczne t. 19, Warszawa 1950, p. 526.

²⁾ A. MAKOWSKI, *Remark on perfect numbers*, *El. Math.* 17 (1962), p. 109.

THÉORÈME 2. *Le nombre 28 est le seul nombre parfait pair de la forme $a^n + b^n$, où a et b sont des entiers positifs premiers entre eux et n est un entier > 1 .*

Démonstration du théorème 1: Comme on sait, tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$, où p et $2^p - 1$ sont des nombres premiers. Supposons que

$$2^{p-1}(2^p - 1) = a^n - b^n, \quad (1)$$

où a et b sont des entiers positifs premiers entre eux et n est un entier > 2 . D'après (1) on a $a > b$.

Si $4 \mid n$, on a $n = 4m$ et

$$a^n - b^n = (a^{2m} - b^{2m})(a^{2m} + b^{2m}) = (A^2 - B^2)(A^2 + B^2),$$

où $A = a^m$, $B = b^m$. Comme $(a, b) = 1$ et $a > b$, on a $(A, B) = 1$ et $A > B$ et le nombre $A^2 + B^2$, en tant qu'une somme de deux carrés distincts de nombres premiers entre eux, a un diviseur premier de la forme $4k + 1$, contrairement au fait que le multiple du nombre $A^2 + B^2$ n'a que les diviseurs premiers 2 et $2^p - 1$. Soit maintenant $n = 2m$, où $2 \nmid m > 1$. Il résulte de (1), $(a, b) = 1$ et $a > b$ que $2 \nmid ab$. Les nombres

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + b^{m-1} > a > 1$$

et

$$\frac{a^m + b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + \dots + b^{m-1} > a > 1,$$

en tant que sommes d'un nombre impair de termes impairs, sont donc impairs. Le nombre

$$a^n - b^n = \frac{a^m - b^m}{a - b} \cdot \frac{a^m + b^m}{a + b} \cdot (a^2 - b^2)$$

a donc deux diviseurs impairs > 1 , ce qui est incompatible avec (1), vu que le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ n'a qu'un seul diviseur impair > 1 , $2^p - 1$.

Soit enfin $2 \nmid n > 1$. On a alors $2 \nmid (a^n - b^n)/(a - b)$ et $(a^n - b^n)/(a - b)$ est un diviseur impair > 1 du nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$, d'où il résulte que

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = 2^p - 1,$$

donc $a - b = 2^{p-1}$, d'où $2(a - b) = 2^p$ et

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = 2(a - b) - 1, \quad \text{d'où } a^n - b^n = 2(a - b)^2 - (a - b),$$

ce qui est impossible, vu que, d'après $n > 2$, nous avons

$$a^n - b^n = [(a - b) + b]^n - b^n \geq [(a - b) + b]^3 - b^3 > 3(a - b)^2.$$

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Démonstration du théorème 2: Supposons que

$$2^{p-1}(2^p - 1) = a^n + b^n, \quad (2)$$

où n est un entier > 1 , $(a, b) = 1$, $a > b > 0$ et où p et $2^p - 1$ sont des nombres premiers.

Il ne peut pas être $2 \mid n$, puisque alors $a^n + b^n$ serait une somme de deux carrés distincts de nombres premiers entre eux, donc aurait un diviseur premier de la forme $4k + 1$, contrairement à (2). Le nombre n est donc impair. Comme $(a, b) = 1$ et d'après (2) on a $2 \mid a^n + b^n$, on trouve $2 \nmid ab$ et le nombre $(a^n + b^n)/(a + b)$ est impair > 1 . D'après (2) on trouve donc $(a^n + b^n)/(a + b) = 2^p - 1$, d'où $a + b = 2^{p-1}$ et

$$a^n + b^n = 2(a + b)^2 - (a + b), \quad a \geq 3. \quad (3)$$

S'il était $n > 3$, on aurait

$$a^n < a^n + b^n = 2(a + b)^2 - (a + b) < 2(a + a)^2 = 8a^2,$$

donc $a^{n-1} < 8a$, ce qui est impossible, vu que $a^{n-1} > 8a - 1$ pour $a \geq 3$, $n > 3$.

Le nombre $n > 1$ étant impair, on a donc $n = 3$ et, d'après (3), on trouve

$$a^2 - ab + b^2 = 2(a + b) - 1, \quad \text{donc } a(a - b - 2) + (b - 1)^2 = 0.$$

S'il était $b > 1$, on aurait $a - b - 2 < 0$, donc $a \leq b + 1$ et, comme $a > b$, on aurait $a = b + 1$. Un des nombres a et b serait donc pair, l'autre impair, contrairement à (2). On a donc $b = 1$ et $a - b - 2 = 0$, d'où $a = 3$ et $a^n + b^n = 28$. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Des théorèmes 1 et 2 résultent tout de suite les corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. *Il n'existe aucun nombre parfait pair de la forme $a^n - 1$, où a et $n > 2$ sont des nombres naturels.*

COROLLAIRE 2. *Le nombre 28 est le seul nombre parfait pair de la forme $a^n + 1$, où a et $n > 1$ sont des nombres naturels.*

A. ROTKIEWICZ (Varsovie)

Kleine Einführung in die Monte Carlo-Methode

1. Einleitung

Die Monte Carlo-Methode gehört zu den statistischen Lösungsverfahren. Im wesentlichen besteht diese Methode in der Simulation eines stochastischen Vorganges auf einer elektronischen Rechenmaschine. Dabei werden für gewisse mathematische Probleme die ihnen äquivalenten stochastischen Vorgänge in einem «Spiel», dessen Regeln dem Charakter der jeweiligen stochastischen Vorgänge angepasst sind, nachgespielt.

Seit etwa zwanzig Jahren werden Monte Carlo-Verfahren zur Lösung von physikalischen und mathematischen Problemen, zum Beispiel zur Lösung von Diffusionsproblemen in der Reaktorthorie, zur Matrizeninversion, zur Berechnung von Integralen über n -dimensionale Bereiche, zur Lösung von gewissen partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen und speziellen vom parabolischen Typus, zur Lösung von linearen Integralgleichungen zweiter Art vom Fredholmschen Typus, vor allem aber zur Lösung von vielen Problemen in der «Operations Research» [vgl. [2]¹⁾] verwendet.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 85.