

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1963)  
**Heft:** 4

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilungen

### Bemerkung zur elementaren Kegelschnittlehre

In der Elementargeometrie der Ellipse steht die Äquivalenz der verschiedenen Erklärungen der Ellipse im Vordergrund. Es wird meistens auf Grund der Fokal-Definition als Satz bewiesen, dass die Ellipse das normal-affine Bild des Hauptkreises der Ellipse in bezug auf deren grosse Achse ist. In der Schulgeometrie wird der Beweis gewöhnlich durch Normalprojektion des Kreises oder auf Grund der Mittelpunktsgleichung der Ellipse geführt, was Gelegenheit für einen Einwand geben kann, während in älteren Lehrbüchern der elementaren Kegelschnittlehre zum Beweise der obigen Tatsache solche Mittel angewandt werden, die heute nicht mehr überall Gegenstände des Schulunterrichts sind. Vor einigen Jahren hat Herr BINDSCHIEDLER einen planimetrischen Beweis des oben erwähnten Satzes gegeben<sup>1)</sup>, der auch auf die letztgenannten Mittel verzichtet. Wir geben hier einen anderen, ebenso einfachen Beweis für den obigen Satz.

Wir gewinnen zuerst aus der Konstruktion der Tangenten der Ellipse durch einen ausserhalb der Ellipse gelegenen Punkt unmittelbar folgenden (ersten)

**Satz** (VON PONCELET): *Wenn  $M$  und  $M'$  die Berührungspunkte der Tangenten der Ellipse durch einen ausserhalb dieser gelegenen Punkt  $S$  sind und  $F$  einen Brennpunkt der Ellipse bedeutet, dann ist immer*

$$\sphericalangle MFS = \sphericalangle SFM'.$$

Dann beweisen wir auf Grund dieses Satzes folgenden (auch an und für sich interessanten)

**1. Hilfssatz**<sup>2)</sup>: *Wenn  $M$  und  $M'$  die Berührungspunkte der von einem ausserhalb der Ellipse liegenden Punkte  $S$  an dieselbe gezogenen Tangenten sind, und wenn die Tangente in dem Punkte  $P$  der Ellipse zu der Sehne  $MM'$  parallel ist und die Punkte  $Q$  bzw.  $Q'$  mit den Tangenten  $SM$  und  $SM'$  gemein hat, so ist  $P$  die Mitte der Strecke  $QQ'$ .*

**Beweis** [nach ZEUTHEN<sup>3)</sup>]. Es sei  $F$  ein Brennpunkt der Ellipse (Figur 1). Dann ist

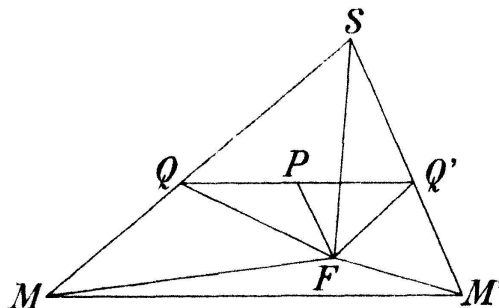
$$\sphericalangle MFQ = \sphericalangle QFP, \quad \sphericalangle PFQ' = \sphericalangle Q'FM', \quad \sphericalangle MFS = \sphericalangle SFM',$$

und man hat für die Flächeninhalte

$$MFQ : QFP = FM : FP, \quad PFQ' : Q'FM' = FP : FM',$$

$$M'FQ' : MFQ = SFM' : MFS = FM' : FM.$$

Durch Multiplikation erhält man aus diesen Gleichungen:  $QFP = PFQ'$ , und so ist  $PQ = PQ'$ , was zu beweisen war.



Figur 1

<sup>1)</sup> C. BINDSCHIEDLER, *Zur Elementargeometrie der Ellipse*, *El. Math.* 3 (1948), 105–111, insbesondere S. 110.

<sup>2)</sup> Wie leicht ersichtlich ist, folgen aus diesem Hilfssatze sofort die bekannten Eigenschaften der Ellipsendurchmesser und auch die der konjugierten Durchmesser, die üblicherweise eben auf Grund der Affinität bewiesen werden.

<sup>3)</sup> H. G. ZEUTHEN, *Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittlehre* (Leipzig 1882), S. 39.

Dann beweisen wir ebenso mit Hilfe des Satzes von PONCELET leicht auch folgenden

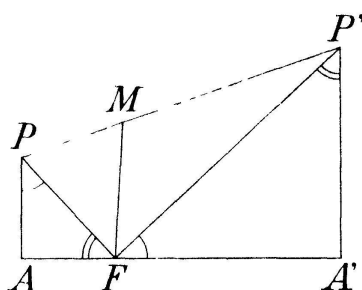
**2. Hilfssatz:** Wenn die Tangente in einem von den Hauptscheiteln  $A$  und  $A'$  verschiedenen Punkte  $M$  der Ellipse mit den Scheiteltangenten in  $A$  und  $A'$  die Punkte  $P$  bzw.  $P'$  gemein hat und  $F$  ein Brennpunkt der Ellipse ist, so gilt

$$\overline{PA} \cdot \overline{P'A'} = b^2,$$

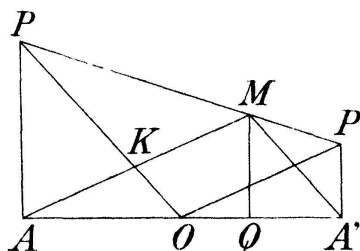
wo  $b$  die kleine Halbachse der Ellipse bedeutet.

**Beweis** (Figur 2). Nach dem Satze von PONCELET schliessen wir leicht, dass der Winkel  $FPF'$  ein rechter ist. Da andererseits nach Voraussetzung auch  $\sphericalangle FAP$  und  $\sphericalangle FA'P'$  rechte Winkel sind, so erweisen sich die Dreiecke  $PAF$  und  $FA'P'$  als einander ähnlich und so ist  $\overline{PA} \cdot \overline{P'A'} = \overline{AF} \cdot \overline{FA'}$ . Ist  $M$  ein Nebenscheitel der Ellipse, so ist  $PA = P'A' = b$ , und somit ist nach dem obigen  $\overline{AF} \cdot \overline{FA'} = b^2$ . Damit ist der Beweis für Hilfssatz 2 erbracht.

Auf Grund der Hilfssätze 1 und 2 gelingt nun der Nachweis des oben erwähnten Satzes.



Figur 2



Figur 3

Es seien nämlich  $A$  und  $A'$  die Hauptscheitel und  $M$  ein von  $A$  und  $A'$  verschiedener Punkt der Ellipse (Figur 3). Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Tangente in dem Punkte  $M$  mit den Scheiteltangenten in  $A$  und  $A'$  bzw. mit  $P, P'$ . Wenn dann  $K$  die Mitte der Strecke  $AM$  ist, so geht die Gerade  $PK$  durch den Mittelpunkt  $O$  der Ellipse, denn diese Gerade geht nach Hilfssatz 1 durch die Berührungspunkte derjenigen beiden Tangenten der Ellipse, die zu der Geraden  $AM$  parallel sind. Somit ist  $OP \parallel A'M$ . Auf die gleiche Weise folgt  $OP' \parallel AM$ . Wenn  $Q$  der Fusspunkt des von dem Punkte  $M$  auf die Gerade  $AA'$  gefällten Lotes ist, dann erweisen sich die Dreiecke  $PAO$  und  $MQA'$ , sowie ferner die Dreiecke  $P'A'O$  und  $MQA$  als einander ähnlich, d. h. es gelten die Gleichungen:

$$\overline{MQ} \cdot \overline{OA} = \overline{PA} \cdot \overline{QA'} \quad \text{und} \quad \overline{MQ} \cdot \overline{OA'} = \overline{P'A'} \cdot \overline{QA};$$

hieraus ergibt sich durch Multiplikation die Gleichung:

$$\overline{MQ}^2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{PA} \cdot \overline{P'A'} \cdot \overline{AQ} \cdot \overline{QA'}.$$

Sind  $a$  und  $b$  die Halbachsen der Ellipse, so folgt hieraus

$$\frac{a^2}{b^2} MQ^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{QA'},$$

und diese Gleichung beweist unsere Behauptung.

J. STROMMER, Budapest

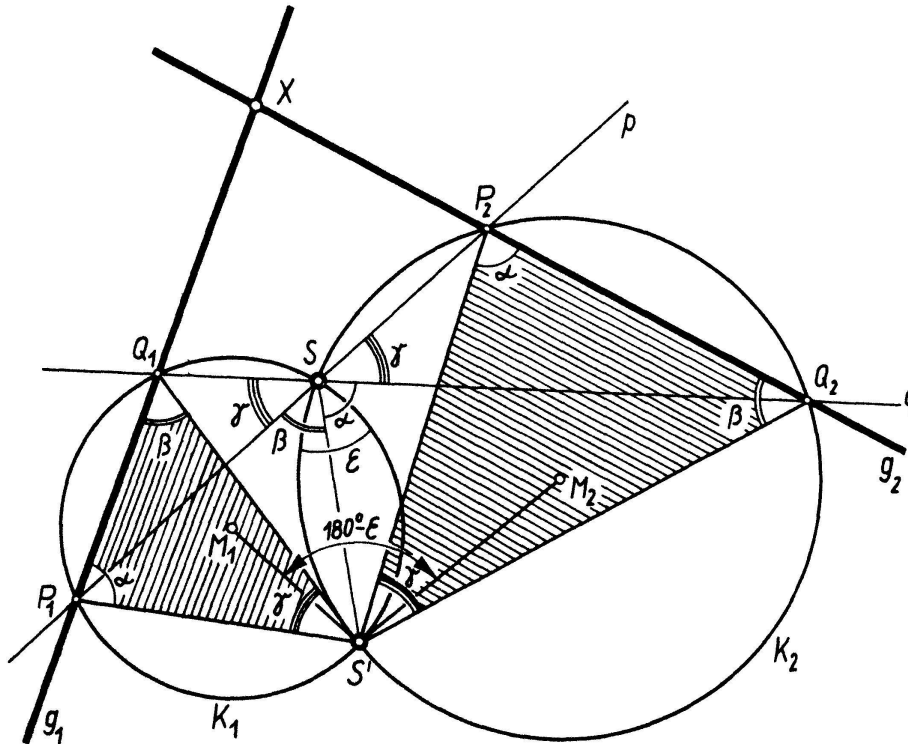
### Adjungierte Geraden eines Kreiszwilling

P. H. MÜLLER definierte «adjungierte» Sekanten und Tangenten zweier einander reell schneidender Kreise  $K_1, K_2$ <sup>1)</sup> und wies auf einige Eigenschaften derselben hin. Insbesondere leitete P. H. MÜLLER Aussagen über die Menge der Schnittpunkte je zweier adjungierter Sekanten, bzw. Tangenten her, wobei alle Ergebnisse in elementarer Weise gewonnen wurden.

<sup>1)</sup> P. H. MÜLLER, *Adjungierte Sekanten und Tangenten zweier Kreise*, *El. Math.* 18 (1963), 11–13.

Durch den Begriff des Adjungiertseins zweier Sekanten bzw. Tangenten der beiden Kreise  $K_1, K_2$  wird in der Ebene eine gewisse Geradentransformation  $\mathfrak{T}$  erklärt, auf die MÜLLER nicht eingeht. Zweck dieser Zeilen ist es, die Geradentransformation  $\mathfrak{T}$  zu untersuchen, wobei auch die Transformation von Geraden betrachtet werden muss, die die Kreise  $K_1, K_2$  nicht reell schneiden. Der einfacheren Sprechweise halber wollen wir mit W. WUNDERLICH zwei einander reell schneidende Kreise (der Ebene) einen Kreiszwilling und  $\mathfrak{T}$  die Transformation von adjungierten Geraden des Kreiszwillings  $K_1, K_2$  nennen.

In Figur 1 wurde zunächst eine den Kreis  $K_1$  reell schneidende Gerade  $g_1$  angenommen (die Bezeichnungen wurden von P. H. MÜLLER übernommen bis auf den Schnittwinkel von  $K_1, K_2$ , der hier mit  $\varepsilon$  bezeichnet wurde). Die Schnittpunkte  $P_1, Q_1$  von  $g_1$  mit  $K_1$



Figur 1

werden sodann aus dem Sekantenzentrum  $S$  (einer der beiden Schnittpunkte von  $K_1$  mit  $K_2$  wird als Sekantenzentrum  $S$ , der andere als  $S'$  bezeichnet) auf  $K_2$  nach  $P_2$  bzw.  $Q_2$  projiziert. Die Verbindungsgerade  $P_2Q_2$  gibt die zu  $g_1$  adjungierte Gerade  $g_2$ .

Verbindet man  $S'$  mit den Punkten  $P_1, Q_1, S, P_2$  und  $Q_2$ , so entstehen die beiden Sehnenvierecke  $S'P_1Q_1S$  und  $S'Q_2P_2S$ . Daraus folgt die Gleichheit folgender Winkel:

$$\sphericalangle S'P_1Q_1 = \sphericalangle S'SQ_2 = \sphericalangle S'P_2Q_2 = \alpha$$

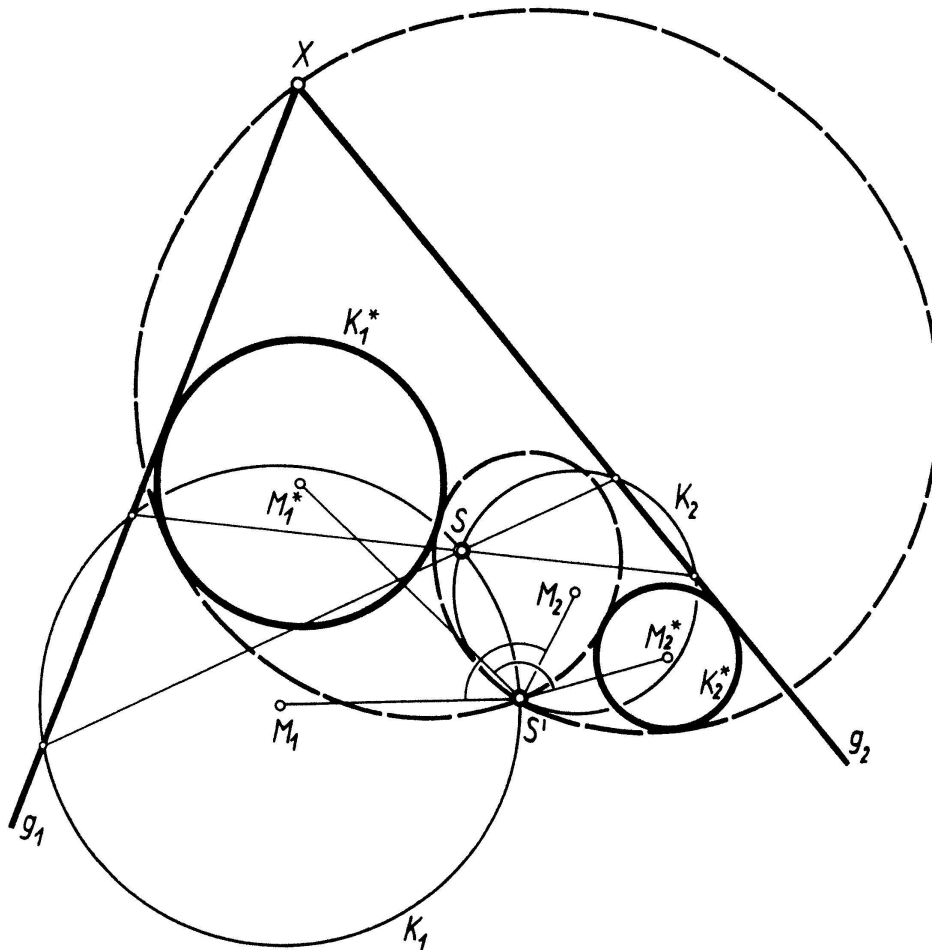
und

$$\sphericalangle P_1Q_1S' = \sphericalangle P_1SS' = \sphericalangle P_2Q_2S' = \beta.$$

Somit sind die beiden Dreiecke  $\triangle S'P_1Q_1$  ( $= \triangle_1$ ) und  $\triangle S'P_2Q_2$  ( $= \triangle_2$ ) gleichsinnig ähnlich. Es lässt sich daher  $\triangle_1$  in  $\triangle_2$  durch dieselbe Drehstreckung um  $S'$  überführen, die  $M_1$  nach  $M_2$  bringt. Der zugehörige Drehwinkel beträgt also  $180^\circ - \varepsilon$ . Die zu einer Sekante  $g_1$  von  $K_1$  adjungierte Sekante  $g_2$  von  $K_2$  (mit dem Sekantenzentrum  $S$ ) geht demnach aus  $g_1$  durch die Drehstreckung ( $S'$ ;  $180^\circ - \varepsilon$ ) hervor.

Nun ergibt sich eine Erweiterung des Begriffes «Adjungiertsein bezüglich des Kreiszwillings  $K_1, K_2$ » auf Geraden allgemeiner Lage von selbst. Ferner lassen sich die von MÜLLER hergeleiteten Eigenschaften adjungierter Geraden aus der Drehstreckung  $\mathfrak{T}$  folgern. Darüber hinaus kann man unschwer weitere Eigenschaften adjungierter Geraden angeben. So entsprechen zum Beispiel den Tangenten eines beliebigen Kreises  $K_1^*$  die Tangenten eines gewissen Kreises  $K_2^*$ . Die Schnittpunkte entsprechender Tangenten erfüllen eine Pascalschnecke, deren (im Endlichen gelegener) singulärer Punkt  $S'$  ist (Figur 2). Diese Pascalschnecke ist die zum Winkel  $\varepsilon$  gehörige isoptische Kurve von  $K_1^*$  und  $K_2^*$ .

Identifiziert man die Kreise  $K_1^*$ ,  $K_2^*$  mit den Kreisen  $K_1$ ,  $K_2$  des zugrunde gelegten Kreiszwillings, so entsteht eine Pascalschnecke mit der (im Endlichen gelegenen) Spitze in  $S'$ , eben die von MÜLLER erwähnte Kardioide  $k$ . Gleitet also eine Tangente  $t_1$  auf  $K_1$ , so gleitet die adjungierte Gerade  $t_2$  auf  $K_2$ . Der Schnittpunkt  $X = t_1 t_2$  durchläuft die Kardioide  $k$ . Man hat so einen ebenen Zwanglauf vor sich, bei dem ein fester Winkel (von der Grösse  $\varepsilon$ ) auf den Kreisen  $K_1$ ,  $K_2$  reitet (umgekehrte Ellipsenbewegung). Die zugehörige



Figur 2

Gangpolkurve ist jener Kreis, den MÜLLER in der genannten Arbeit mit  $K$  bezeichnet. Die von MÜLLER in Satz III erwähnten Kreispaaire gehören zu den Hüllbahnen der Strahlen des Büschels um den Scheitel des reitenden Winkels. Damit ist ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Verwandtschaft der adjungierten Geraden eines Kreiszwillings und der ebenen Kinematik angedeutet.

R. BEREIS, Dresden

## Aufgaben

**Aufgabe 430.** Démontrer que chacune des formules

$$n \mid 2^n + 1, \quad n \mid 2^{2^n} + 1, \quad n \mid 2^n + 2$$

a une infinité de solutions en nombres naturels  $n$ .

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

1. Teil der Lösung: In Verallgemeinerung der ersten beiden Aussagen der Aufgabe gilt folgender

Satz: Ist  $a$  eine natürliche Zahl und  $a + 1$  keine Potenz von 2 (also  $a \neq 1, 3, 7, 15, 31, \dots$ ), dann besitzt die Beziehung  $n \mid a^n + 1$  unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen  $n$ .