

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1963)
Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

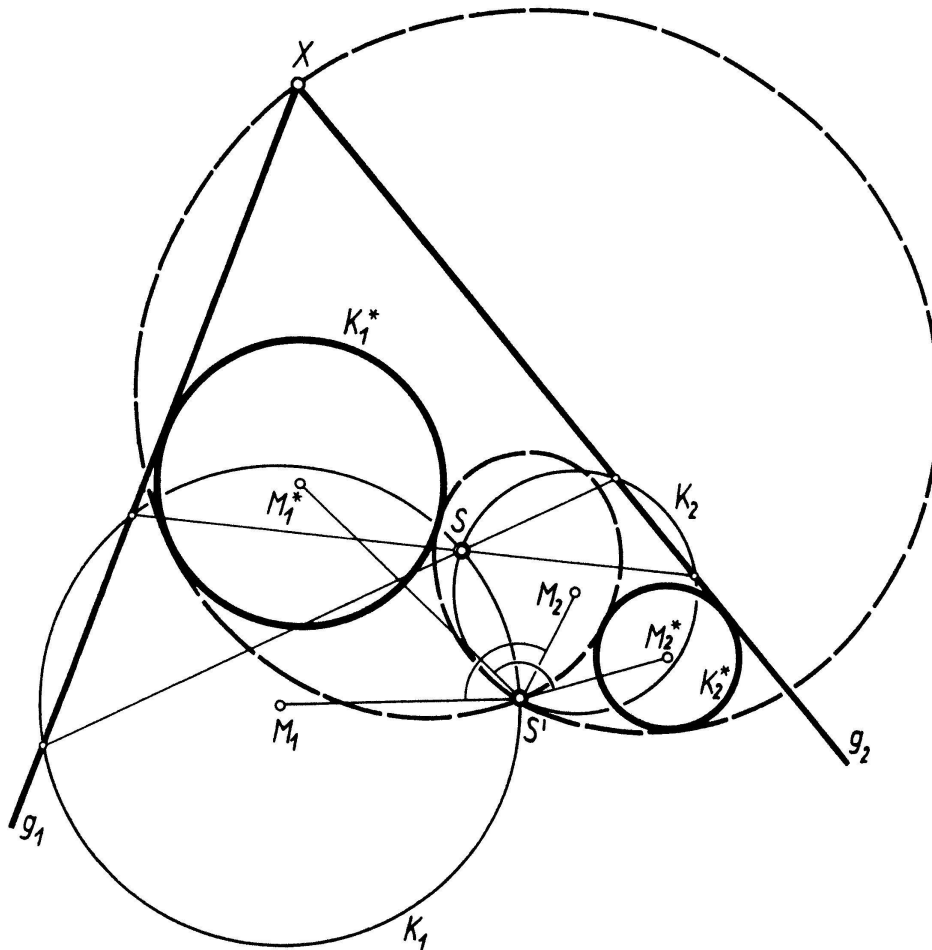
Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Identifiziert man die Kreise K_1^* , K_2^* mit den Kreisen K_1 , K_2 des zugrunde gelegten Kreiszwillings, so entsteht eine Pascalschnecke mit der (im Endlichen gelegenen) Spitze in S' , eben die von MÜLLER erwähnte Kardioide k . Gleitet also eine Tangente t_1 auf K_1 , so gleitet die adjungierte Gerade t_2 auf K_2 . Der Schnittpunkt $X = t_1 t_2$ durchläuft die Kardioide k . Man hat so einen ebenen Zwanglauf vor sich, bei dem ein fester Winkel (von der Grösse ε) auf den Kreisen K_1 , K_2 reitet (umgekehrte Ellipsenbewegung). Die zugehörige



Figur 2

Gangpolkurve ist jener Kreis, den MÜLLER in der genannten Arbeit mit K bezeichnet. Die von MÜLLER in Satz III erwähnten Kreispaaire gehören zu den Hüllbahnen der Strahlen des Büschels um den Scheitel des reitenden Winkels. Damit ist ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Verwandtschaft der adjungierten Geraden eines Kreiszwillings und der ebenen Kinematik angedeutet.

R. BEREIS, Dresden

Aufgaben

Aufgabe 430. Démontrer que chacune des formules

$$n \mid 2^n + 1, \quad n \mid 2^{2^n} + 1, \quad n \mid 2^n + 2$$

a une infinité de solutions en nombres naturels n .

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

1. Teil der Lösung: In Verallgemeinerung der ersten beiden Aussagen der Aufgabe gilt folgender

Satz: Ist a eine natürliche Zahl und $a + 1$ keine Potenz von 2 (also $a \neq 1, 3, 7, 15, 31, \dots$), dann besitzt die Beziehung $n \mid a^n + 1$ unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen n .

Beweis: Es sei $f(x) = a^x + 1$. Da $a + 1 = f(1)$ keine Potenz von 2 ist, besitzt diese Zahl mindestens einen Primteiler $p > 2$; und da p ungerade ist, gilt dann die Identität

$$f(p^{k+1}) = [f(p^k) - 1]^p + 1 = \sum_{v=1}^p (-1)^{p-v} \binom{p}{v} f^v(p^k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Aus dieser folgt zunächst für $k = 0$, dass wegen $p \mid f(1)$ auch $p \mid f(p)$. Wird weiterhin vorausgesetzt, dass $p^k \mid f(p^k)$ für irgendein $k \geq 1$, dann enthält jeder Summand in obiger Summe wegen $p \mid \binom{p}{v}$ ($v = 1, 2, \dots, p-1$) zumindest den Faktor p^{k+1} , so dass also auch $p^{k+1} \mid f(p^{k+1})$. Folglich bildet die Potenzfolge p^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) eine unendliche Lösungsmannigfaltigkeit, q. e. d.

O. REUTTER, Ochsenhausen

2. Teil der Lösung: Die Bedingung $n \mid 2^n + 2$ wird erfüllt durch die rekursiv definierten Zahlen $n_1 = 2$, $n_{i+1} = z(n_i) + 1$, wo $z(N) = 2^N + 1$ gesetzt ist. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion: $n_{i+1} \mid n_{i+2}$ bedeutet $z(n_i - 1) \mid z(n_{i+1} - 1)$, und dafür ist hinreichend, dass $n_i - 1$ Teiler von $n_{i+1} - 1$ ist, das heisst $z(n_{i-1}) \mid z(n_i)$. Dies ist aber richtig, wenn $n_{i-1} \mid n_i$ und der Quotient n_i/n_{i-1} ungerade ist. Das gilt für $i = 2$ und $i = 3$, und damit folgt dann die Behauptung. Durch die Rekursion werden nicht alle Lösungen erfasst; zum Beispiel ist auch $n = 946 = 2 \cdot 11 \cdot 43$ eine Lösung.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Ungefähr dieselben Lösungen sandte E. TEUFFEL (Stuttgart) ein. Weitere Lösungen gingen ein von L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), L. CARLITZ (Durham/USA), P. HOHLER (Olten) und W. JÄNICHEN (Berlin).

Aufgabe 431. Zu beweisen: Stimmen zwei auf einer Fläche Φ verlaufende Kurven c_1 und c_2 in einem Punkte U des wahren Umrisses von Φ in den Linienelementen von genau n -ter Ordnung überein, so haben ihre Projektionen c_1^* und c_2^* in der Projektion U^* von U ein Linienelement von mindestens $(n+1)$ -ter Ordnung gemeinsam. Berühren die Flächenkurven c_1 und c_2 in U den wahren Umriss von Φ , so haben ihre Projektionen c_1^* und c_2^* sogar ein Linienelement von mindestens $(n+2)$ -ter Ordnung gemeinsam, wobei vorausgesetzt wird, dass die Kurven c_1 und c_2 in U keine projizierende Tangente haben.

H. VOGLER, Wien

Lösung des Aufgabenstellers: Zur analytischen Festlegung von Φ verwenden wir ein projektives, inhomogenes Koordinatensystem mit dem Koordinatentetraeder $O_0 O_1 O_2 O_3$ und dem Einheitspunkt E . Der «Ursprung» O_0 möge mit dem Umrisspunkt U , O_2 mit dem Projektionszentrum zusammenfallen; ferner sei die Tangente des wahren Umrisses in U durch $[O_0 O_1]$ bestimmt. Die Geraden $t_1 = [O_0 O_1]$ und $t_2 = [O_0 O_2]$ liegen dann in konjugierten Flächentangenten von Φ . Ist die Fläche Φ in der Umgebung von U regulär, so hat sie dort nach einer geeigneten Wahl des Einheitspunktes E folgende TAYLORSche Entwicklung:

$$x_3 = g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varphi_i(x_1, x_2), \quad (1)$$

wobei die φ_i Formen n -ten Grades in den (unabhängigen) Variablen x_1 und x_2 bedeuten. Insbesondere gilt also für die partiellen Ableitungen der Funktion $g(x_1, x_2)$ im Ursprung O_0 :

$$g_{x_1} = g_{x_2} = g_{x_1 x_1} = 0, \quad g_{x_1 x_2} = g_{x_2 x_1} = 2. \quad (2)$$

Es bedeutet keine Einschränkung der vollen Allgemeinheit, die Bildebene in die Ebene $[O_0 O_1 O_3]$ zu verlegen, da das Übereinstimmen der Linienelemente bis zur n -ten Ordnung bei «Weiterprojektion» erhalten bleibt.

Durch

$$x_2 = f(x_1) \quad (3)$$

sei eine auf Φ liegende Kurve c bestimmt, die durch den Punkt U geht und in einer Umgebung von U regulär ist. Ihre Projektion c^* auf die Bildebene π ist durch

$$x_3 = g(x_1, f(x_1)) = x_1^2 + f^2(x_1) + \sum_{i=3}^{\infty} \varphi_i(x_1, f(x_1)) \quad (4)$$

festgelegt. c^* ist in der Umgebung von U ebenfalls regulär. Die Koeffizienten ihrer TAYLORSchen Entwicklung erhalten wir durch Anwendung der «Kettenregel» für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen. Es gilt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_3}{dx_1} &= g_{x_1} + g_{x_2} \cdot f', & \frac{d^2x_3}{dx_1^2} &= g_{x_1x_1} + 2g_{x_1x_2} \cdot f' + g_{x_2x_2} \cdot f'^2 + g_{x_2} \cdot f'' , \\ \frac{d^3x_3}{dx_1^3} &= g_{x_1x_1x_1} + 3g_{x_1x_1x_2} \cdot f' + 3g_{x_1x_2x_2} \cdot f'^2 + g_{x_2x_2x_2} \cdot f'^3 + 3g_{x_1x_2} \cdot f'' \\ & & & + 3g_{x_2x_2} \cdot f' f'' + g_{x_2} \cdot f''' . \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Durch vollständige Induktion zeigt man leicht, dass die Ableitung $d^\nu x_3/dx_1^\nu$ die Bauart:

$$\frac{d^\nu x_3}{dx_1^\nu} = g_{x_2} \cdot f^{(\nu)} + \nu \cdot f^{(\nu-1)} (g_{x_1x_2} + f' \cdot g_{x_2x_2}) + \Psi \quad (6)$$

hat, wobei die Funktion Ψ von den partiellen Ableitungen von $g(x_1, x_2)$ bis zur Ordnung ν und von den Ableitungen der Funktion $f(x_1)$ bis zur Ordnung $\nu - 2$ abhängt. Wegen (2) hängt im Punkt U die Ableitung $d^\nu x_3/dx_1^\nu$ nur in den ersten $\nu - 1$ Ableitungen von $f(x_1)$ ab. Berührt ferner c den wahren Umriss von Φ in U , so ist

$$f'(0) = 0 \quad (7)$$

und die Ableitung $d^\nu x_3/dx_1^\nu$ hängt sogar nur von den ersten $\nu - 2$ Ableitungen von $f(x_1)$ ab. Damit sind die behaupteten Aussagen bewiesen.

Anmerkung: Für die Sonderfälle $n = 1, 2$ sind die entsprechenden Aussagen bereits bekannt*).

Eine weitere Lösung sandte H. MEILI, Winterthur.

Aufgabe 432. Durch Rotieren der Bernoullischen Lemniskate um die Mittelsenkrechte ihrer Brennpunkte entsteht eine Fläche. Man bestimme ihre nichttrivialen Kreisschnitte.
G. UNGER, Dornach

Lösung: Die Bernoullische Lemniskate c ist die Inverse einer gleichseitigen Hyperbel c' in bezug auf den Hauptscheitelkreis k um O (vgl. z. B. G. LORIA, Ebene Kurven Bd. I, S. 216), wobei das Mittellot z der Brennpunkte von c die imaginäre Achse von c' bildet.

Die gegebene Fläche ϕ ist daher zu dem einschaligen Drehhyperboloid ϕ' mit Meridian c' invers in bezug auf die Kugel K mit Meridian k , und dabei entsprechen den Kreisen von ϕ die Kreise und Geraden von ϕ' . Daraus folgt, dass die gesuchten, von den Parallelkreisen verschiedenen Kreisschnitte von ϕ als inverse Bilder der Erzeugenden von ϕ' in den gegen z um 45° geneigten Bündelebenen durch O liegen und die Radien des Äquators von ϕ als Durchmesser haben.

Es ist zu bemerken, dass dieselben Überlegungen ergeben, dass die Drehfläche von c auch bei Rotation um die andere Achse von c nichttriviale Kreisschnitte besitzt, die allerdings nicht reell sind, denn anstelle von ϕ' tritt ein zweischaliges Drehhyperboloid, und ein solches trägt konjugiert-komplexe Erzeugende.
H. SCHAAL, Stuttgart

Weitere Lösungen sandten J. BASILE (Brüssel) und C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht).

Aufgabe 433. Entsprechende Strahlbüschel einer ebenen Kollineation sind projektiv und erzeugen bekanntlich einen Kegelschnitt, der alle Fixpunkte der Kollineation enthält. Wie verteilen sich die Scheitel solcher Büschelpaare, die Kegelschnitte einer bestimmten (etwa durch die numerische Exzentrizität gekennzeichneten) Gestalt erzeugen, insbesondere Parabeln und gleichseitige Hyperbeln?
W. WUNDERLICH, Wien

*) H. SCHAAL, Zur Konstruktion der Krümmungskreise des scheinbaren Umrisses einer Fläche bei Zentral- oder Parallelprojektion, Sber. d. Bayr. Akad. Wiss. München, Sonderdruck No. 17, 1960, S. 280, Satz 1.

Lösung des Aufgabenstellers: Die Gestalt des von zwei projektiven Strahlbüscheln erzeugten Kegelschnittes hängt im wesentlichen von dem (reellen oder komplexen) Winkel ω ab, den die beiden Paare entsprechender Parallelen bilden, weil er den Asymptotenwinkel angibt. Es sind mithin zunächst die Paare solcher kollinear entsprechenden Geraden t, t' zu ermitteln, die parallel sind. Gibt man den gemeinsamen Fernpunkt $P = Q'$ beliebig vor, so legen die zugeordneten Punkte P' und Q ein Paar entsprechender Parallelen $t = PQ, t' = P'Q'$ fest. Lässt man dann $P = Q'$ die Ferngerade $u = v'$ der Ebene durchlaufen, so beschreibt P' die Fluchtgerade $u' (\neq v')$ und Q die Verschwindungsgerade $v (\neq u)$. Das Hüllgebilde der Geraden t ist im allgemeinen eine Parabel c , erzeugt von den projektiven Punktreihen $v'(Q') \asymp v(Q)$; ihr entspricht im zweiten Feld die von den Punktreihen $u'(P') \asymp u(P)$ erzeugte Parabel c' .

Jeder Punkt S des ersten Feldes, für welchen die beiden an die Parabel c legbaren Tangenten t_1, t_2 die Winkel ω und $\pi - \omega$ bilden, ist Scheitel eines Strahlbüschels, das mit dem kollinear entsprechenden Büschel S' einen Kegelschnitt mit dem Asymptotenwinkel ω oder $\pi - \omega$ erzeugt. Der Ort aller Punkte S für festes ω ist eine «isoptische Kurve» k von c , und das ist wiederum ein gewisser Kegelschnitt. Die Fernpunkte P_1, P_2 von t_1, t_2 sind nämlich durch eine Projektivität verknüpft, die die absoluten Kreispunkte I, J zu Doppelpunkten hat. Da die diese Projektivität tragende Ferngerade u Parabeltangente ist, hängen auch die Tangentenpaare t_1, t_2 von c selbst durch eine Projektivität zusammen, die die beiden Minimaltangente i, j von c zu Doppelpunkten hat. Der (reelle) Schnittpunkt von i und j ist der Brennpunkt F von c , ihre (konjugiert-imaginären) Berührungspunkte M, N liegen auf der Leitlinie f von c . Das Erzeugnis der Projektivität $c(t_1) \asymp c(t_2)$ – die in der Ebene eine automorphe Kollineation von c induziert – ist ein die Parabel c in M und N doppelt berührender Kegelschnitt k , der mithin gleichfalls F zum Brennpunkt und f zur zugehörigen Leitlinie besitzt; sein Asymptotenwinkel beträgt, wie leicht zu erkennen ist, 2ω . Mit Rücksicht auf die analogen Verhältnisse im zweiten Feld gilt mithin:

«Die Scheitel S, S' kollinear entsprechender Strahlbüschel, die einen Kegelschnitt mit dem Asymptotenwinkel ω erzeugen, verteilen sich auf zwei Kegelschnitte k, k' mit dem Asymptotenwinkel $\bar{\omega} = 2\omega$, welche zwei monofokalen Berührungsbüscheln entnommen sind».

Zwischen den numerischen Exzentrizitäten $\varepsilon = \sec(\omega/2)$ und $\bar{\varepsilon} = \sec \omega$ besteht die Relation $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^2 / (2 - \varepsilon^2)$.

Soll der erzeugte Kegelschnitt insonderheit eine Parabel sein ($\varepsilon^2 = 1$), so ist S auf der obgenannten Parabel c zu wählen. Soll der erzeugte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel sein ($\varepsilon^2 = 2$), so ist S auf der (zur Verschwindungsgeraden v parallelen) Leitlinie f von c zu wählen. Soll der erzeugte Kegelschnitt ein Kreis sein, so kommt für S nur der Brennpunkt F in Betracht.

Neue Aufgaben

Aufgabe 457. a) Wie gross ist das Achsenverhältnis einer Ellipse, der sich (unendlich viele) Sehnensechsecke einschreiben lassen, deren Seiten abwechselnd zu den beiden Winkelhalbierenden der Achsen parallel sind?

b) Zu jeder Ellipse mit einem Achsenverhältnis $a/b > \sqrt{3}$ gibt es zwei Scharen von Sehnensechsecken, bei denen je zwei aufeinanderfolgende Seiten aufeinander senkrecht stehen. Alle Sechsecke derselben Schar sind schiefssymmetrisch in bezug auf denselben Durchmesser der Ellipse. Man konstruiere ein solches Sechseck in eine gegebene Ellipse.

C. BINDSCHEDLER, Küssnacht

Aufgabe 458. Man zeige, dass für ein Tetraeder die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen auf eine Ebene dann und nur dann von der Lage der Ebene nicht abhängt, wenn das Tetraeder regulär ist.

W. JÄNICHEN, Berlin

Aufgabe 459. Man zeige, dass jede ganze Zahl auf unendlich viele Weisen als Summe von achtzehn fünften Potenzen ganzer Zahlen darstellbar ist.

E. KRÄTZEL, Jena

Aufgabe 460. a_1, a_2, \dots, a_k seien natürliche Zahlen $\leq n$ mit der Eigenschaft, dass $a_r a_s$ für $r \neq s$ keine Quadratzahl ist. Man zeige, dass k höchstens gleich der Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leq n$ ist.

P. ERDÖS, Budapest

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x -Achse nach rechts, y -Achse nach vorn, z -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1.
$$f(n) = \left(\frac{2 + 3i}{\sqrt{5}} \right)^n + \left(\frac{2 - 3i}{\sqrt{5}} \right)^n.$$

Berechne die Funktionswerte für $n = 0; 1; 2; 3; 4$.

►
$$2; \quad \frac{4}{\sqrt{5}}; \quad -2; \quad -\frac{92}{5\sqrt{5}}; \quad -\frac{238}{25}.$$

2. Stelle $z = \sqrt{4ab + 2i(a^2 - b^2)}$ in der Form $u + iv$ dar.

► 1. Lösung:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 4ab \\ u^2 + v^2 = 2(a^2 + b^2) \end{cases}$$

unter Berücksichtigung von $uv = a^2 - b^2$.

2. Lösung:

$$z = \sqrt{-2i(b + ia)^2} = \pm (b + ia) \sqrt{-2i} = \pm (b + ia)(1 - i) = \pm [(a + b) + i(a - b)].$$

3. Zeige, dass die Bilder der drei Zahlen

$$A = -1 - i \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad B = \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{6}; \quad C = -\frac{1}{2} + i \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

in der Ebene der komplexen Zahlen die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist.

► A, B und C sind die Werte von

$$z = \sqrt[3]{3 - i \frac{10\sqrt{3}}{9}}.$$

4. B, C, D, E sind die Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit einem Kreis, dessen Zentrum A derjenige Hyperbelpunkt ist, der B diametral gegenüberliegt. C, D und E sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

► Beweis analytisch mittels komplexer Zahlen, Nullpunkt in A . Ein planimetrischer, leider nicht sehr einfacher Beweis findet sich in J. LEMAIRE, *Etude élémentaire de l'hyperbole équilatère*, Paris 1927, p. 40. Für einen eleganten planimetrischen Beweis dieses schönen Satzes wäre ich dankbar. Der Inhalt des Satzes wird in *Praxis der Mathematik*, Heft 6, 1961 als STRAZZERI-Konfiguration mitgeteilt; der Satz stammt aber von BROCARD (*Nouvelle Correspondance Mathématique*, 1877, p. 127).

5. Dem Einheitskreis wird ein reguläres n -Eck einbeschrieben. Bestimme das geometrische Mittel der Abstände irgendeines Eckpunktes von den $n - 1$ anderen.

► In der Ebene der komplexen Zahlen sind die Ecken $z = \varepsilon_k$ die Wurzeln der Gleichung $z^n - 1 = 0$, ($k = 0; 1; \dots; n - 1$). Für die Abstände des Punktes $\varepsilon_0 = 1$ von den anderen gilt

$$d_k = |1 - \varepsilon_k|, \quad (k = 1; 2; \dots; n - 1).$$

$z^n - 1 = 0$ hat die Wurzel $z = 1$, folglich besitzt

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} \equiv z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$$

die Wurzeln $z = \varepsilon_k$, ($k = 1; 2; \dots; n - 1$); demnach ist

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = (z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_2) \dots (z - \varepsilon_{n-1}).$$

Für $z = 1$ folgt hieraus

$$(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \dots (1 - \varepsilon_{n-1}) = n,$$

also ist auch $d_1 d_2 \dots d_{n-1} = n$, und das gesuchte geometrische Mittel hat den Wert $\sqrt[n-1]{n}$.

Literaturüberschau

Inequalities. Von E. F. BECKENBACH und R. BELLMAN. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Neue Folge Heft 30. XII und 198 Seiten mit 6 Abbildungen. DM 48.60. Springer Verlag, Berlin 1961.

1934 erschien das heute klassische Werk gleichen Titels von HARDY, LITTLEWOOD und POLYÁ, das wohl zum ersten Mal eine Systematik in das aus vielen Einzelresultaten bestehende Spezialgebiet der Ungleichungen brachte. Seither ist die Bedeutung der Ungleichungen ständig gewachsen, vor allem im Hinblick auf viele moderne Anwendungsgebiete der Mathematik (Spieltheorie, Lineare Programmierung, Ökonometrie etc.). Wie sehr die allgemeine Entwicklung der Algebra und Analysis auch diesem Forschungsgebiet zugute gekommen ist, wird aus dem vorliegenden Heft ersichtlich, das ein modernes Sammelwerk von Resultaten und Methoden in übersichtlicher Form darstellt.

Die klassischen Ungleichungen haben weitgehende Verallgemeinerungen und Verschärfungen erfahren. Darüber orientiert das 1. Kapitel, in dem der Leser auch viele in letzter Zeit entdeckte Ungleichungen kennenlernt. Die Beweise sind hier meistens angegeben; für die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel sogar deren zwölf.

Neuartige Typen von Ordnungsbeziehungen treten im hyperkomplexen Bereich auf. Das wird im 2. Kapitel gezeigt, dessen Hauptgegenstand die Matrizen sind. Der grundlegende Begriff der positiven Zahl kann hier auf verschiedene Arten erweitert werden.

Im 3. Kapitel über Momentenräume kommen geometrische Gesichtspunkte aus der Theorie der konvexen Körper zur Anwendung. Einem Funktionenraum, der mit $f(x)$ und $g(x)$ auch alle $\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, enthält, entspricht nämlich ein konvexes Gebiet in einem R_n , wenn als Koordinaten eines Punktes die (sehr allgemein definierten) ersten n Momente von $f(x)$ genommen werden. Die einfache geometrische Bemerkung, dass die Distanz zwischen einem ausserhalb eines Eibereichs \mathfrak{B} liegenden Punkt P und einem Punkt der Begrenzung von \mathfrak{B} dort minimal wird, wo der Abstand von P von den Tangentialebenen von \mathfrak{B} ein (lokales) Maximum hat, zeigt die Äquivalenz zwischen gewissen Maximal- und Minimalproblemen, die in abstrakten Räumen zu wichtigen Resultaten führt.

Gegenstand des 4. Kapitels sind Differentialoperatoren L . Unter gewissen Voraussetzungen gelten Sätze von folgendem Typus: Aus $L(u) \geq 0$ folgt $u \geq 0$, oder aus $L(u) > 0$ und $L(v) = 0$ folgt $u > v$.

Im letzten Kapitel werden Differentialungleichungen behandelt, die eng mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen zusammenhängen. Typisch ist folgendes Resultat: Gehört u dem linearen normierten Raum $L^p[0, \infty]$ mit $p \geq 1$ und u'' dem Raum L^r mit $r \geq 1$ an, so liegt u' für $m \geq \max(p, r)$ in L^m , das heisst, das von 0 bis ∞ erstreckte