Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1963)
Heft: 5

Artikel: Propriétés algébriques des polynômes en D
Autor: Tauber, S.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22646

Propriétés algébriques des polynômes en D

1. Introduction

Nous designerons par D l'opérateur d/dx, et par D^m l'opérateur itéré m fois, c'est-à-dire que $D^m = d^m/dx^m$, par monôme en D une expression de la forme $f(x)\, D^m$, que nous convenons d'écrire $f\, D^m$. Nous appellerons polynôme en D une expression de la forme

$$A = \sum_{m=0}^{n} a_m(x)\, D^m = \sum_{m=0}^{n} a_m\, D^m\,. \tag{1}$$

Nous appellerons degré du polynôme la puissance la plus élevée en D et nous l'écrirons deg $(A) = n$. Rappelons que $D^0 = I$, opérateur identique.

Un produit de deux monômes $a\, D^m b\, D^n$ doit être interprété comme le produit par a du résultat de l'opération de D^m sur $b\, D^n$. Par contre $a(D^m b)\, D^n$ signifie que a multiplie le résultat de l'opération de D^m sur $b(x)$, le tout multipliant D^n. Il suit que nous pouvons écrire $a(D^m b)\, D^n = (D^m b)\, a\, D^n = f\, D^n$, où $f = a(D^m b)$.

Nous rappelons que D et toutes ses puissances sont des opérateurs linéaires, c'est-à-dire que f et g étant des fonctions de x et α et β des constantes, on a $D\,(\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha\, Df + \beta\, Dg$.

D^m étant appliqué à un produit de deux fonctions on a d'après la formule de Leibniz

$$D^m a\, b = \sum_{q=0}^{m} \binom{m}{q} (D^q a)\, (D^{m-q} b) = \sum_{q=0}^{m} \binom{m}{q} (D^{m-q} a)\, (D^m b) \tag{2}$$

et

$$D^m\, a\, D^n = \sum_{q=0}^{m} \binom{m}{q} (D^q a)\, D^{n+m-q} = \sum_{q=0}^{m} \binom{m}{q} (D^{m-q} a)\, D^{n+q}\,. \tag{3}$$

Dans la présente étude nous rappelons d'abord les propriétés algébriques des polynômes en D, puis nous introduisons les divisions à droite et à gauche de deux polynômes. Comme on verra il est essentiel de distinguer entre ces deux opérations puisque le produit de deux polynômes n'est pas commutatif.

2. Opérations sur les monômes

Puisque D et toutes ses puissances sont des opérateurs linéaires il n'y a aucune difficulté dans l'addition des monômes et leur multiplication par des nombres ou des fonctions. En plus l'addition est commutative, associative et la multiplication par des fonctions est distributive par rapport à l'addition.

La situation est différente pour la multiplication de monômes entre eux. En général $f\, D^m g\, D^n \neq g\, D^n f\, D^m$, puisque

$$f\, D^m g\, D^n = f \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (D^k g)\, D^{n+m-k} = f \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (D^{m-k} g)\, D^{n+k}$$

et

$$g\, D^n f\, D^m = g \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^k f)\, D^{m+n-k} = g \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{n-k} f)\, D^{m+k}\,.$$

Ces deux expressions sont en général différentes. Il s'ensuit que les multiplications de monômes ne sont pas commutatives en général. Nous allons montrer qu'elles sont cependant associatives. Considérons les trois monômes $\alpha = a\,D^m$, $\beta = b\,D^n$, et, $\gamma = c\,D^k$. Nous aurons:

$$\alpha\,\beta = a\,D^m b\,D^n = a \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (D^{m-p} b)\, D^{n+p}$$

$$(\alpha\beta)\gamma = a \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (D^{m-p} b)\, D^{n+p} c\, D^k = a \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (D^{m-p} b) \sum_{q=0}^{n+p} \binom{n+p}{q} (D^{n+p-q} c)\, D^{k+q}.$$

D'autre part,

$$\beta\,\gamma = b\,D^n c\,D^k = b \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (D^{n-r} c)\, D^{k+r}$$

$$\alpha(\beta\,\gamma) = a\,D^m b \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (D^{n-r} c)\, D^{k+r} = a \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (D^{m-p} b)\, D^p \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (D^{n-r} c)\, D^{k+r}$$

$$= a \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (D^{m-p} b) \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \sum_{s=0}^{p} \binom{p}{s} (D^{n-r+p-s} c)\, D^{k+r+s}$$

$$= a \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (D^{m-p} b) \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \binom{n}{r} \binom{p}{s} (D^{n+p-(r+s)} c)\, D^{k+(r+s)}.$$

Posons $r + s = q$, nous aurons

$$\alpha(\beta\,\gamma) = a \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (D^{m-p} b) \sum_{r=0}^{n} \sum_{q-r}^{p+r} \binom{n}{r} \binom{p}{q-r} (D^{n+p-q} c)\, D^{k+q}.$$

Pour une valeur donnée de q, r varie de 0 à q, et dans ces conditions q peut prendre toutes les valeurs de 0 à $p + n$. Nous pouvons donc écrire

$$\alpha(\beta\,\gamma) = a \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (D^{m-p} b) \sum_{q=0}^{p+n} (D^{n+p-q} c)\, D^{k+q} \sum_{r=0}^{q} \binom{n}{r} \binom{p}{q-r}.$$

D'après la formule due à CAUCHY (voir par exemple [1], p. 73)

$$\sum_{r=0}^{q} \binom{n}{r} \binom{p}{q-r} = \binom{n+p}{q},$$

on voit que

$$\alpha(\beta\,\gamma) = a \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (D^{m-p} b) \sum_{q=0}^{n+p} \binom{n+p}{q} (D^{n+p-q} c)\, D^{k+q} = (\alpha\,\beta)\,\gamma.$$

Nous avons ainsi démontré l'associativité des produits de monômes en D.

3. Polynômes en D

Soient les trois polynômes en D:

$$A = \sum_{p=0}^{n} a_p D^p, \quad B = \sum_{q=0}^{m} b_q D^q, \quad C = \sum_{r=0}^{k} c_r D^r. \tag{4}$$

Supposons pour fixer les idées que $n > m > k$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 2 nous pouvons écrire

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C = \sum_{p=0}^{n} f_p D^p ,$$

où

$$\begin{aligned} f_p &= a_p + b_p + c_p && \text{pour } 0 \leq p \leq k \\ f_p &= a_p + b_p && \text{pour } k + 1 \leq p \leq m \\ f_p &= a_p && \text{pour } m + 1 \leq p \leq n . \end{aligned}$$

Nous avons vu au paragraphe 2 que le produit de monômes n'est pas commutatif. Il s'ensuit que le produit de polynômes ne l'est pas non plus. Comme le produit multiple de monômes est associatif il en est de même des produits de polynômes, en effet

$$(AB)\, C = \left(\sum_{p=0}^{n} a_p D^p \sum_{q=0}^{m} b_q D^q \right) \sum_{r=0}^{k} c_r D^r = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} \sum_{r=0}^{k} a_p D^p b_q D^q c_r D^r$$
$$= A(BC) = ABC .$$

4. Division à droite

Soient A et B les deux polynômes définis au paragraphe 3 et supposons encore que $\deg (A) = n > \deg (B) = m$. Nous cherchons deux polynômes Q et R tels que

$$A = QB + R , \tag{5}$$

avec la condition $\deg (R) < \deg (B)$. Pour déterminer Q et R nous opérons comme suit:

Nous considérons d'abord le produit $q_0 D^{n-m} b_m D^m$, où q_0 est une fonction que nous définirons plus loin. Nous aurons

$$q_0 D^{n-m} b_m D^m = q_0 \sum_{s=0}^{n-m} \binom{n-m}{s} (D^{n-m-s} b_m)\, D^{m+s} .$$

Séparant le terme correspondant à $s = n - m$ (puisque $n > m$, $n - m$ est au moins égal à 1), on aura

$$q_0 D^{n-m} b_m D^m = q_0\, b_m D^n + q_0 \sum_{s=0}^{n-m-1} \binom{n-m}{s} (D^{n-m-s} b_m)\, D^{m+s} .$$

Calculons maintenant le produit $q_0 D^{n-m} B$. En écrivant pour B

$$B = \sum_{q=0}^{m} b_q D^q = b_m D^m + \sum_{q=0}^{m-1} b_q D^q ,$$

nous obtenons

$$q_0 D^{n-m} B = q_0\, b_m D^n + q_0 \sum_{s=0}^{m-n-1} \binom{n-m}{s} (D^{n-m-s} b_m)\, D^{m+s}$$
$$+ q_0 \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-m} \binom{n-m}{s} (D^{n-m-s} b_q)\, D^{q+s} .$$

Dans la première somme prenons $m + s = u$, et, faisant les changements correspondants dans les limites nous obtenons pour la première somme

$$q_0 \sum_{s=0}^{n-m-1} \binom{n-m}{s} (D^{n-m-s} b_m) D^{m+s} = q_0 \sum_{u=m}^{n-1} \binom{n-m}{u-m} (D^{n-u} b_m) D^u .$$

Dans la seconde somme prenons $q + s = u$, nous aurons

$$q_0 \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-m} \binom{n-m}{s} (D^{n-m-s} b_q) D^{q+s} = q_0 \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{u=q}^{q+m-n} \binom{n-m}{u-q} (D^{n-m-u+q} b_q) D^u .$$

Pour une valeur donnée de u, q varie de 0 à u, donc la dernière expression peut être écrite

$$q_0 \sum_{u=0}^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{u} \binom{n-m}{u-q} (D^{n-m-u+q} b_q) \right\} D^u .$$

En substituant cette expression dans $q_0 D^{n-m} B$, nous aurons

$$q_0 D^{n-m} B = q_0 b_m D^n + q_0 \left\{ \sum_{u=m}^{n-1} \binom{n-m}{u-m} (D^{n-u} b_m) D^u + \sum_{u=0}^{n-1} \left[\sum_{q=0}^{u} \binom{n-m}{u-q} (D^{n-m-u+q} b_q) \right] D^u \right\}.$$

Soit alors

$$c_u = \sum_{q=0}^{u} \binom{n-m}{u-q} (D^{n-m-u+q} b_q) , \quad \text{pour } 0 \leq u \leq m-1$$

et

$$c_u = \sum_{q=0}^{u} \binom{n-m}{u-q} (D^{n-m-u+q} b_q) + \binom{n-m}{u-m} (D^{n-u} b_m) , \quad \text{pour } m \leq u \leq n-1 .$$

En changeant u en p nous obtenons

$$q_0 D^{n-m} B = q_0 b_m D^n + q_0 \sum_{p=0}^{n-1} c_p D^p .$$

Nous écrivons alors

$$A = q_0 D^{n-m} B + A_0 , \tag{6}$$

donc

$$A_0 = A - q_0 D^{n-m} B = \sum_{p=0}^{n-1} a_p D^p + a_n D^n - q_0 b_m D^n - \sum_{p=0}^{n-1} c_p D^p .$$

Si nous choisissons $q_0 = a_n / b_m$ le terme en D^n disparaît et nous aurons

$$A_0 = \sum_{p=0}^{n-1} (a_p - c_p) D^p = \sum_{p=0}^{n_0} a_{0,p} D^p ,$$

où n_0 est la plus grande valeur de p pour laquelle $a_p - c_p \neq 0$, et $a_p - c_p = a_{0,p}$. Mais n_0 est le degré de A_0, donc $\deg(A_0) = n_0 \leq n-1$.
Nous envisageons alors deux possibilités:

1. $\deg(A_0) < \deg(B)$, c'est-à-dire, $n_0 < m$. Dans ce cas $A_0 = R$, et la division est terminée.

$$Q = q_0 D^{n-m} = \frac{a_n}{b_m} D^{n-m}, \quad A = QB + R.$$

2. $\deg(A_0) \geqq \deg(B)$, c'est-à-dire, $n_0 \geqq m$. Dans ce cas nous continuons la division en écrivant

$$A_0 = q_1 D^{n_0-m} B + A_1. \tag{7}$$

En opérant comme précédemment, prenant $q_1 = a_{0,n_0}/b_m$, nous trouverons

$$A_1 = A_0 - q_1 D^{n_0-m} B = \sum_{p=0}^{n_0-1} a_{1,p} D^p = \sum_{p=0}^{n_1} a_{1,p} D^p,$$

où n_1 est la plus grande valeur de p pour laquelle $a_{1,p} \neq 0$, et $a_{1,p}$ est défini comme $a_{0,p}$. De nouveau nous avons deux possibilités:

3. $\deg(A_1) < \deg(B)$, c'est-à-dire, $n_1 < m$; dans ce cas la division est terminée, $R = A_1$, et, $Q = q_0 D^{n-m} + q_1 D^{n_0-m}$.

4. $\deg(A_1) \geqq \deg(B)$, c'est-à-dire, $n_1 \geqq m$, dans ce cas nous continuons la division en écrivant

$$A_1 = q_2 D^{n_1-m} B + A_2, \tag{8}$$

et ainsi de suite.

Puisque

$$\deg(A_0) = n_0 \leq n - 1,$$
$$\deg(A_1) = n_1 \leq n_0 - 1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\deg(A_j) = n_j \leq n_{j-1} - 1,$$

les degrés des polynômes successifs $A_0, A_1, \dots$ vont en diminuant. Il arrivera donc un moment où nous trouverons A_s de degré inférieur au degré de B. La division devra donc s'arrêter. Nous aurons donc avec $n_s < m$

$$A = (q_0 D^{n-m} + q_1 D^{n_0-m} + q_2 D^{n_1-m} + \dots + q_s D^{n_{s-1}-m}) B + A_s.$$

Nous avons donc effectué la division à droite. Montrons que le résultat de cette division est unique. Supposons qu'il y ait deux divisions possibles: $A = QB + R$, $\deg(R) < \deg(B)$, et, $A = Q'B + R'$, $\deg(R') < \deg(B)$. Il s'ensuit que $QB + R = Q'B + R'$, ou, $(Q - Q')B = R' - R$. Comme R et R' sont de degré inférieur à B, $R' - R$ est de degré inférieur à B, donc de degré inférieur à $(Q - Q')B$. L'égalité n'est donc possible que si $Q = Q'$, et, $R = R'$, ce qui montre que la division est unique.

5. Divisibilité à droite

On dit que le polynôme A est divisible à droite par le polynôme B s'il existe un polynôme Q tel que $A = QB$. Il est clair que dans ces conditions $R = 0$.

Les théorèmes concernant la division et la divisibilité des polynômes algébriques et qui n'utilisent pas la propriété de commutativité des polynômes algébriques peuvent être redémontrés pour les polynômes en D. En particulier on peut définir un plus grand commun diviseur à droite de deux polynômes en D. Nous ne donnons pas ces démonstrations qui sont élémentaires.

6. Application aux équations différentielles linéaires homogènes

Jusqu'à présent nous avons étudié les polynômes en D d'un point de vue purement algébrique. Les polynômes en D sont cependant des opérateurs linéaires et $Ay = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène. D'après [2] et [3] l'équation $Ay = 0$ est dite réductible s'il existe une équation $By = 0$ ayant au moins une solution particulière en commun avec $Ay = 0$, et étant d'ordre inférieur à $Ay = 0$. Il est clair que l'ordre de l'équation differentielle linéaire homogène est le degré du polynôme. Dans notre cas la réductibilité correspond à l'existence d'un plus grand commun diviseur à gauche, de degré au moins égal à un, pour les deux polynômes. En effet, soit $E = p_1 D + p_0$, et, $A = Q_1 E$, $B = Q_2 E$. Si y_1 est une solution particulière de $Ey = 0$, il est clair que y_1 sera aussi une solution particulière de $Ay = Q_1 Ey = 0$, et de $By = Q_2 Ey = 0$. Plus généralement si C, comme défini par (4) est le plus grand commun diviseur à droite de A et B, c'est-à-dire que, $Ay = Q_3 Cy = 0$, et $By = Q_4 Cy = 0$, il s'ensuit que les solutions particulières de $Cy = 0$ sont aussi des solutions particulières de $Ay = 0$, et de $By = 0$. En particulier, si $A = QB$, $Ay = 0$ admettra toutes les solutions particulières de $By = 0$ comme solutions particulières.

Cependant toutes ces conditions sont suffisantes mais elles ne sont pas nécessaires. Il se peut en effet que y_1 soit une solution particulière commune à $Ay = 0$, et $By = 0$, sans que y_1 soit une solution particulière d'une équation linéaire du premier ordre et homogène. Nous pouvons résumer les résultats précédents de la façon suivante:

Théorème: Une condition suffisante pour la réductibilité de l'équation différentielle linéaire homogène $Ay = 0$ est l'existence d'une équation différentielle linéaire homogène $By = 0$, d'ordre inférieur à $Ay = 0$, et telle que les deux polynômes A et B aient un plus grand commun diviseur à droite de degré au moins égal à 1.

7. Division à gauche

De même que nous avons défini une division à droite nous pouvons définir une division à gauche des polynômes en D, en écrivant

$$A = BQ + R, \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Le calcul des deux cas présente de grandes analogies. Remarquons que le terme de plus haut degré sera le même pour les deux divisions. On aura pour la division à gauche

$$Q = q_0 D^{n-m} + q_1 D^{n-m-1} + \dots$$

et $q_0 = a_n / b_m$, comme il sera facile à vérifier.

SELMO TAUBER, Portland State College, Portland, Oregon, U.S.A.

REFERENCES

[1] CH. JORDAN, *Calculus of Finite Differences* (N.Y. 1950).

[2] G. FROBENIUS, *Über den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, J. f. reine u. angew. Math. *76* (1873), 236–270.

[3] M. HAMBURGER, *Über die Reductibilität linearer homogener Differentialgleichungen*, J. f. reine u. angew. Math. *111* (1893), 121–138.