**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 20 (1965)
**Heft:** 1

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

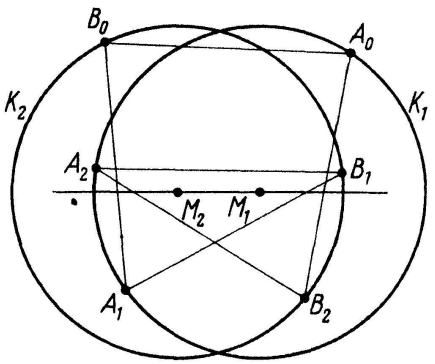
**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 17.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

und also

$$k_2^2 < (2\,R - d)^2\,, \quad \text{oder} \quad k + d < 2\,R\,.$$




Figur 5

In Figur 5 ist für diesen Fall das Dreieck $A_0\,A_1\,A_2$ konstruiert; es wurde dabei $d = 1$, $R = 2$ und also $k^2 = k_2^2 = 8{,}8$ genommen. O. BOTTEMA, Delft

# Kleine Mitteilungen

## Über Pseudoprimzahlen

In El. Math. *19*, 36 (1964) hat A. ROTKIEWICZ gezeigt, dass jede Zahl

$$M = \frac{a^{a^{n^2}} - 1}{a^{a^n} - 1} \qquad (n \geqq 4)$$

in bezug auf die natürliche Zahl $a > 1$ pseudoprim ist, das heisst $M$ ist zusammengesetzt und $M \mid a^{M-1} - 1$, also auch $M \mid a^M - a$. Bei der Durchsicht des Beweises von ROTKIEWICZ stellte ich fest, dass die Wahl des relativ grossen Exponenten $n^2$ bei der Zählerzahl nicht notwendig ist. Vielmehr lässt sich zeigen, dass bereits der Exponent $n + 2$ dafür hinreichend ist, dass $M$ für $n \geqq 2$ bezüglich $a$ pseudoprim ist. Ich beweise hier den folgenden

*Satz:* Ist $a > 1$ eine natürliche Zahl und

$$A_n = a^{a^n} - 1\,,$$

dann ist

$$M = \frac{A_{n+r}}{A_n}$$

für $n \geqq r \geqq 2$ ($n, r$ ganz) bezüglich $a$ pseudoprim.

*Beweis:* Die Zahlen $A_n$ haben die Eigenschaften $A_p < A_q$ für $p < q$, $A_p \mid A_q$ und $A_p + 1 \mid A_q + 1$ für $p \leqq q$, und $A_{a^n} + 1 = a^{A_n + 1}$ ($p, q, n$ nicht-negativ, ganz). Daraus folgt zunächst

$$A_n\,(M - 1) = A_{n+r} - A_n = (A_n + 1)\left(\frac{A_{n+r} + 1}{A_n + 1} - 1\right) = (A_n + 1)\,g$$

mit ganzzahligem $g$, also $A_n + 1 \mid M - 1$, da $(A_n, A_n + 1) = 1$. Nun gilt für $n \geqq r \geqq 2$ sicherlich die Ungleichung $n + r \leqq a^n$, somit $M \mid A_{n+r} \mid A_{a^n} = a^{A_n + 1} - 1 \mid a^{M-1} - 1$, letzteres wegen $A_n + 1 \mid M - 1$. Es ist also $M \mid a^{M-1} - 1$, und $M$ ist auch zusammengesetzt, denn

$$N = \frac{A_{n+1}}{A_n}$$

hat die Eigenschaften $N \mid M$ und $1 < N < M$, da $r \geqq 2$ ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen

## Über die Primzahlwerte der Funktion $x^2 + x + c$.

Es sei $\{p\}$ die Menge der ungeraden Primzahlen, $c \in \{p\}$, und $f(x) = x^2 + x + c$ ein quadratisches Polynom mit der Diskriminante $\Delta = 1 - 4c$. Bekanntlich ([1], S. 48) sind $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(h)$ Primzahlen, wenn $(\Delta/p) = -1$ für alle $p \leqq \sqrt{f(h)}$, $h \leqq c - 2$. Das Beispiel $c = 41$, $h = 39$ (EULER) ist sehr bekannt. Wir zeigen hier auf direktem Wege, dass die Bedingung

$$\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \quad \text{für alle} \quad p \leqq \sqrt{\frac{-\Delta}{3}} \tag{1}$$

schon für $f(x) \in \{p\}$, $0 \leqq x \leqq c - 2$ genügt. Im Eulerschen Fall hat man also anstelle der $p \leqq 37$ nur die $p \leqq 7$ zu prüfen. Diese Tatsache ist schon von mehreren Autoren als Korollar von Untersuchungen in quadratischen Körpern gefunden worden [2], [3]. Das Kriterium besitzt allerdings nur einen beschränkten Wert, denn $x^2 + x + c$ nimmt genau dann für $0 \leqq x \leqq c - 2$ Primzahlwerte an, wenn der Körper $R(\sqrt{d})$, $d = 1 - 4c$, die Klassenzahl 1 hat (vgl. [4], S. 156). Nach HEILBRONN-LINFOOT gibt es aber höchstens noch *einen* einklassigen Körper mit $d < -163$.

Für unseren Beweis setzen wir $h = 0{,}5\,(-1 + \sqrt{-\Delta/3})$. Dann ist $f(h) = -\Delta/3$ und aus (1) folgt $f(x) \in \{p\}$ für $0 \leqq x \leqq h$. Es bleibt zu zeigen, dass $f(\overline{x}) \in \{p\}$ für $h < \overline{x} < c - 1$ gilt. Nun nehmen wir an, dass für ein $\overline{x_0}$ aus diesem Intervall die Zerlegung $f(\overline{x_0}) = n_0 m_0$ mit $2 < n_0 \leqq m_0$ bestehe. Aus der für die $\overline{x}$ geltenden Ungleichung $\sqrt{f(\overline{x})} < 2\overline{x} + 1$ folgt

$$n_0 < 2\overline{x_0} + 1\,. \tag{2}$$

Offensichtlich ist $f(\overline{x_0} - n_0) = n_0 \overline{m_0}$, wo $\overline{m_0} < m_0$ wegen (2) und $\overline{m_0}$ eine natürliche Zahl ist. $\overline{m_0} = 1$ ist unmöglich, denn dann wäre

$$\overline{x_0} - n_0 + f(\overline{x_0} - n_0) = \overline{x_0} < c - 1$$

im Gegensatz zu

$$x + f(x) = (x + 1)^2 + c - 1 > c - 1\,.$$

$\overline{x_0} - n_0$ kann nicht im abgeschlossenen Intervall $(-h - 1; h)$ liegen, da sonst $f(\overline{x_0} - n_0)$ wegen $f(x) = f(-x - 1)$ eine Primzahl wäre und damit $\overline{m_0} = 1$. Somit ist $\overline{x_0} - n_0 > h$ oder $n_0 - \overline{x_0} > h + 1$. Im ersten Fall setzen wir $\overline{x_0} - n_0 = \overline{x_1}$, im zweiten $n_0 - \overline{x_0} - 1 = \overline{x_1}$. Wegen $f(x) = f(-x - 1)$ ist in beiden Fällen

$$f(\overline{x_0} - n_0) = f(\overline{x_1}) = n_0 \overline{m_0} = n_1 m_1\,, \quad \text{wo} \quad n_1 = \min(n_0, \overline{m_0})\,, \quad m_1 = \max(n_0, \overline{m_0})\,.$$

Ferner gilt in beiden Fällen

$$h < \overline{x_1} < \overline{x_0}\,,$$

wobei im zweiten Fall (2) zu berücksichtigen ist. In gleicher Weise erhält man jetzt $f(\overline{x_1} - n_1) = f(\overline{x_2}) = n_1 \overline{m_1} = n_2 m_2$ $(\overline{m_1} > 1,\ n_2 \leqq m_2)$, wobei

$$h < \overline{x_2} < \overline{x_1} < \overline{x_0}\,.$$

Das Verfahren führt nach endlich vielen Schritten zu einem Widerspruch. Somit ist die Annahme $f(\overline{x_0}) = n_0 m_0$ falsch und $f(\overline{x_0}) \in \{p\}$.

Wegen $(c - 1)/h = 1{,}5\,(1 + \sqrt{-\Delta/3})$ wird das Intervall $(0, c - 2)$ durch $h$ so geteilt, dass das Verhältnis der Länge des rechten Teils zum linken mit $c$ unbegrenzt wächst. Der Gewinn durch unsere Überlegung wird also immer grösser.

K. SELUCKÝ, Brünn, CSR

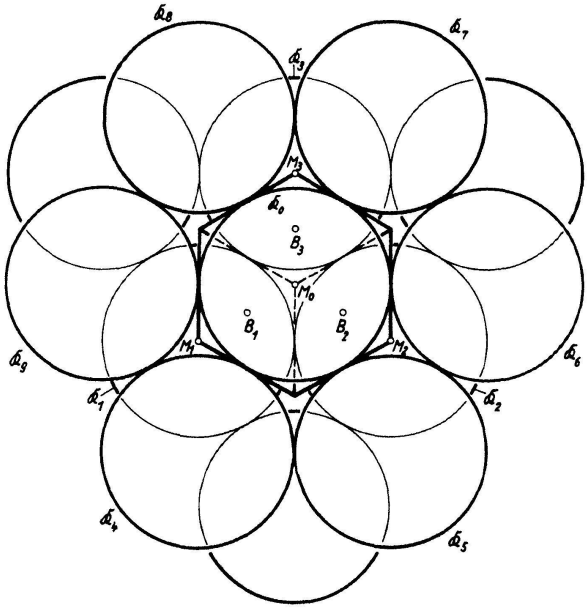
### LITERATUR

[1] E. TROST, *Primzahlen* (russische Übersetzung), Moskau 1959.
[2] J. MAŘÍK, Časopis pro pěst. mat. *78*, 57 (1953).
[3] W. E. CHRISTILLES, Amer. Math. Monthly *68*, 138–143 (1961)
[4] H. COHN, *A second Course in Number Theory*, J. Wiley Sons, New York (1962)

## Beitrag zur Geometrie der Bienenzelle[1])

Die Erzeugung der Zellen einer Bienenwabe kann auf Grund der Minimalforderung, die die Zellen unter gewissen Nebenbedingungen bezüglich der Oberfläche erfüllen, in folgender Weise gedacht werden:

Man geht von zwei Schichten einer dichtesten Kugelpackung aus. Legt man in den gemeinsamen Punkten je zweier sich berührender Kugeln die Tangentialebenen an diese Kugeln, so liegen sämtliche Begrenzungsebenen der Bienenzellen in diesen Tangentialebenen (Figur 1).



Figur 1

Zur Herleitung weiterer elementargeometrischer Beziehungen im Aufbau der (idealisierten) Bienenwabe werde zunächst nur eine Bienenzelle betrachtet, die sich aus neun Tangentialebenen an die Kugel $\mathfrak{K}_0$ in der angegebenen Weise zusammensetzt. $\mathfrak{K}_0$ wird von den Kugeln $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ in den Punkten $B_1$, $B_2$ bzw. $B_3$ von unten berührt. Die drei Tangentialebenen $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ bilden den Boden der Zelle. Diese Bodenfläche wird durch die Schnittgeraden mit den sechs vertikalen Tangentialebenen von $\mathfrak{K}_0$ seitlich begrenzt. Der Zellboden besteht folglich aus drei Rhomben[2]), die je einer Tangentialebene von $\mathfrak{K}_0$ angehören. Die sechs Seitenflächen der Zelle sind Tangentialebenen an die Kugelpaare $\mathfrak{K}_0$ $\mathfrak{K}_i$ ($i = 4, 5, 6, 7, 8, 9$) in ihren gemeinsamen Punkten. Verbindet man die Kugelmittelpunkte $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ miteinander, so erhält man ein regelmässiges Tetraeder. Der $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_i$ ($i = 1, 2, 3$) gemeinsame Punkt $B_i$ ist Halbierungspunkt der Strecke $\overline{M_0M_i}$. Die Tangentialebene $\tau_i$ steht normal auf der Tetraederkante $\overline{M_0M_i}$. Die Ebenen $\tau_i$ schneiden sich auf Grund der Symmetrieeigenschaften im Schwerpunkt $S$ des Tetraeders (Figur 2).

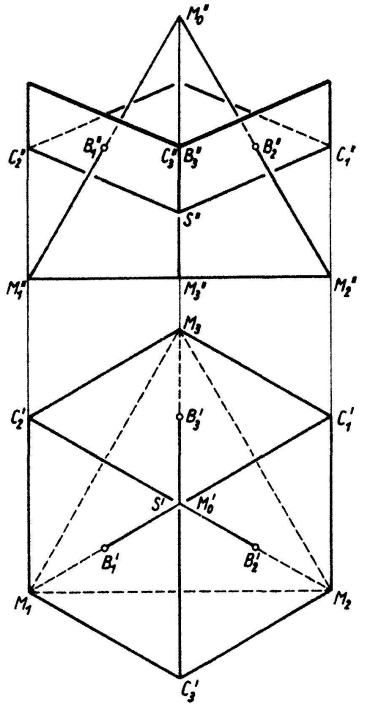
Passt man das Tetraeder derart in einen Würfel ein, dass die Punkte $M_i$ in Eckpunkte des Würfels und die Kanten des Tetraeders in Flächendiagonalen des Würfels fallen, dann

---

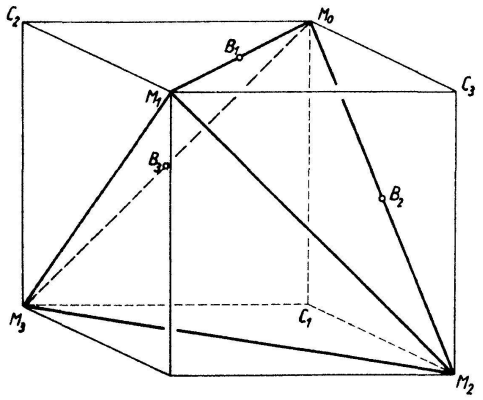
[1]) Die Anregung zu dieser geometrischen Betrachtung der Bienenzelle verdanke ich meinem Vater, Herrn Oberlehrer Hermann Schröder, der den am Schluss vorliegender Note ausgesprochenen Satz bereits empirisch gefunden hatte.

[2]) In dem interessanten Aufsatz [7] (vgl. das Literaturverzeichnis) wird gezeigt, dass diese Bodengestaltung für die offene Zelle nicht die beste ist. Man erhält bei gegebenem Volumen eine etwas kleinere Oberfläche, wenn man für den Boden zwei zentralsymmetrische Sechsecke und zwei Rhomben in der Anordnung eines umgekehrten «Walmdaches» verwendet. Die Sechsecke schliessen am «First» den Winkel 120° ein und die Firstlänge ist gleich der Seite des die Öffnung der Zelle bildenden regulären Sechsecks.

kommt auch der Schwerpunkt $S$ des Tetraeders in den Mittelpunkt des Würfels zu liegen (Figur 3).

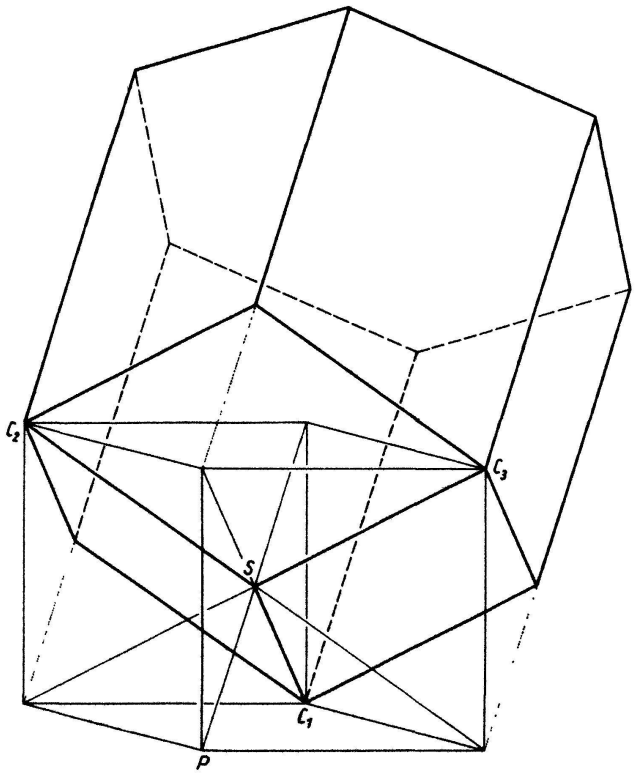



Figur 2




Figur 3

Ferner fallen die Punkte $B_i$ in Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels. Da ausserdem $\overline{C_1C_2} = \overline{M_0M_3}$ und $\overline{C_1C_2} \perp \overline{M_0M_3}$ und $\overline{SB_3}$ ist, folgt, dass bei dieser Einpassung die




Figur 4

Punkte $C_1$, $C_2$ und damit auch $C_3$ in drei weitere Eckpunkte des Würfels fallen. Die Schnittgeraden $(\tau_1\,\tau_2) = (SC_3)$, $(\tau_2\,\tau_3) = (SC_1)$, $(\tau_3\,\tau_1) = (SC_2)$ liegen daher in drei der vier Raumdiagonalen des Würfels (Figur 4).

Hieraus ist nun weiter erkennbar, dass die Rhomben der Basisfläche jeweils senkrecht auf der sie durchsetzenden Würfelseite stehen. Zum Beispiel ist der von den Punkten $SC_2C_3$ aufgespannte Rhombus senkrecht zu der Würfelseite $M_0C_2M_1C_3$. Ferner sind auch die zu $(SC_2)$ und $(SC_3)$ parallelen Seiten des Basisrhombus Diagonalen eines Würfels, den man auf den gegebenen aufsetzen kann. Aus dieser Einbettung der Zelle in den Würfel ist weiterhin abzulesen, dass sich die Diagonalen in den Rhomben der Basisfläche wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten.

Aber auch die vierte Raumdiagonale $(SP)$ des Würfels ist eine drei Zellen der Wabe gemeinsame Kante. Diese Zellen sind in entgegengesetzter Stellung bezüglich der bisher betrachteten angeordnet. Jeder der drei Rhomben der Basisfläche der ersten Zelle ist zugleich Rhombus der Basisfläche je einer der drei gegenständigen Zellen. Die den drei gegenständigen Zellen gemeinsame Kante fällt in die Verbindungsgerade $(SP)$, da $(SP)$ senkrecht auf der Ebene $(C_1C_2C_3)$ steht. Da alle Seitenkanten der Zellen einer (idealisierten) Wabe untereinander parallel sind und jede Seitenkante der von uns betrachteten Zelle durch einen Eckpunkt des Würfels geht, folgt der Satz: *Sämtliche Schnittkanten der Zellen einer Wabe liegen in den Diagonalen eines kubischen Raumgitters.*

E. Schröder, Technische Universität Dresden

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Kepler, Johannes, *Gesammelte Werke*, Band VI S. 83, herausgegeben von Max Caspar (München 1940).
[2] Mac-Laurin, *Of the Basis of the Cells wherein the Bees deposite their Honey*. Philosophical Transactions 1743, p. 565–571.
[3] Lambert, J. H., *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*. Dritter Teil, Seite 387–394 (Berlin 1772).
[4] Henessy, Henry, *On the Geometrical Construction of the Cell of the Honey-Bee*. Procedings of the Royal Society of London, Band 39, Jahrgang 1886, Seite 253–254 und Band 41, Seite 442–443.
[5] Vogt, Heinrich, *Geometrie und Ökonomie der Bienenzelle* (Breslau 1911).
[6] Steinhaus, Hugo, *Kaleidoskop der Mathematik*, Seite 189 und 212 (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1959).
[7] Tóth, L. Fejes, *What the Bees know and what they do not know*. Bull. Amer. Math. Soc. *70*, 468–481 (1964).

## Transversalensätze und Dreieckskoordinaten

In El. Math. *6* (1951), Seite 59 beweist R. Nüscheler folgenden Satz über die Höhen $H_a$, $H_b$, $H_c$ eines ebenen Dreiecks und deren obere Abschnitte $h_a$, $h_b$, $h_c$:

$$\frac{h_a}{H_a} + \frac{h_b}{H_b} + \frac{h_c}{H_c} = 2\,.$$

Diese Tatsache der Bruchsumme 2 ist nicht auf die Höhen beschränkt, sondern gilt für *irgendwelche* Cevatransversalen $U$, $V$, $W$ (Nüscheler erwähnt nur noch die Seitenhalbierenden) und ihre gerichteten unteren Abschnitte $u, v, w \gtreqless 0$ vom Cevapunkt $P$ bis zu den Dreiecksseiten in der Gestalt

$$\frac{U-u}{U} + \frac{V-v}{V} + \frac{W-w}{W} = 2\,.$$

Dies wird meist

$$\frac{u}{U} + \frac{v}{V} + \frac{w}{W} = 1 \qquad \begin{pmatrix} u, v, w & \gtreqless 0 \\ U, V, W & > 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

geschrieben und stellt die fundamentale Beziehung zwischen den Dreieckskoordinaten $u/U$, $v/V$, $w/W$ des Cevapunktes $P$ dar (Bild 1). $P$ darf dabei die gesamte Dreiecksebene

(auch ausserhalb des Dreiecks) durchlaufen. Die bekannte Beziehung (1) heisst der Fraktions- oder Transversalensatz von EULER-GERGONNE 1780 (1850 auch STEINER) und bedeutet offenbar nichts anderes als eine Zusammensetzung des Dreiecksinhalts aus 3 Teildreiecken $\gtreqless 0$ mit Spitzen $P$ über den ursprünglichen Seiten (man lösche $u$, $v$, $w$; Bild 2), worauf dieser Tage wiederum A. SIEBEL hinwies.

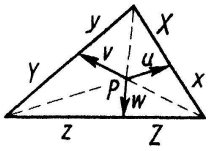



Bild 1

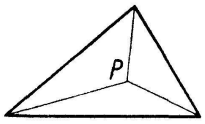



Bild 2

Bild 3

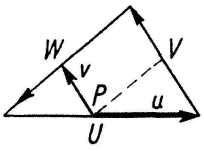



Bild 4

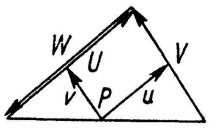



Bild 5

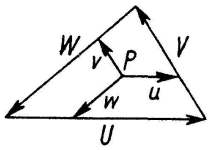



Bild 6

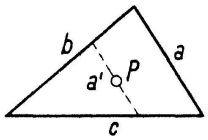



Bild 7

Man bestätigt mit (1) leicht

$$\left(\frac{U}{u}-1\right)\left(\frac{V}{v}-1\right)\left(\frac{W}{w}-1\right)=\frac{U}{u}+\frac{V}{v}+\frac{W}{w}-1\,. \tag{2}$$

Im Falle $u, v, w > 0$ ($P$ im Inneren des Dreiecks) ist in (2) jede Gleichungsseite $\geqq 8$ mit Gleichheit genau für $P =$ Schwerpunkt der Dreiecksfläche. Dies stellt eine Verschärfung der ebenen Ungleichung aus [1] dar. Der Beweis ergibt sich mit Bild 1 am einfachsten, indem man zeigt, dass jede Gleichungsseite von (2) den Wert

$$\left(\frac{x}{X}+1\right)\left(\frac{y}{Y}+1\right)\left(\frac{z}{Z}+1\right)=\left(\frac{X}{x}+1\right)\left(\frac{Y}{y}+1\right)\left(\frac{Z}{z}+1\right)$$
$$=\left(\frac{x}{X}+\frac{y}{Y}+\frac{z}{Z}+1\right)+\left(\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}+1\right)$$

mit $x\,y\,z = X\,Y\,Z$ (Ceva) hat. Im Falle positiver $x, y, z, X, Y, Z$ ist dann offenbar $x/X + X/x \geqq 2$ usw., also der gesamte Ausdruck $\geqq 8$. Die zur Umformung von (2) verwendete Beziehung

$$\frac{X}{x}+\frac{y}{Y}=\frac{W}{w}-1$$

ist der bekannte Satz von H. VAN AUBEL, vgl. H. DÖRRIE, Math. Miniaturen, Breslau 1943, Seite 73.

Nimmt man noch den Strahlensatz (ähnliche Dreiecke) hinzu, so gilt (1) (2) allgemeiner für *irgendwelche* (also nicht notwendig Ceva-) Ecktransversalen $U$, $V$, $W$ des Dreiecks und die zu ihnen parallelen gerichteten Strecken $u$, $v$, $w$ von *irgendeinem* Punkt $P$ der Dreiecksebene bis zu den Dreiecksseiten (Bild 3).

Legt man $U$, $V$, $W$ in 3 oder 2 Seiten des Dreiecks und auch $P$ in eine Seite (Bild 4 und 5), so ist der Fraktions- oder Transversalensatz (1) von EULER-GERGONNE identisch mit dem Vierstrecken- oder Strahlensatz. Etwas allgemeiner ist der häufige Fall Bild 6 von (1).

Verlängert man die Strecken $u, v, w$ von Bild 6, so ergibt sich der Satz (Bild 7): Für 3 Strecken $a', b', c'$ durch $P$, die parallel zu (und zwischen) den Seiten $a, b, c$ verlaufen, gilt die Formel

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 2 .$$

Auch hier ist $P$ nicht auf das Innere des Dreiecks beschränkt.

I. PAASCHE, München

LITERATUR

[1] J. BERKES, El. Math. *12*, 121–123 (1957).
[2] P. KNABE, Praxis d. Math. (PM) *3*, 42 (1961).
[3] L. KRONECKER, *Bemerkungen zur Determinantentheorie* (Auszüge aus Briefen an BALTZER), Crelle's J. *72*, 152–175 (1869) oder Werke I, Leipzig 1895, S. 235–269.
[4] R. LAEMMEL, Der math. u. natw. Unterr. (MNU) *6*, 170 (1953/54).
[5] I. PAASCHE, MNU *9*, 212–213 (1956/57).
[6] I. PAASCHE, Problem 57, PM *2*, 331 (1960).
[7] K. RIEDEL, Archimedes *14*, 72–73 (1962).
[8] A. ROHRBERG, PM *1*, 124–126 (1959).

# Aufgaben

**Aufgabe 469.** Wie gross ist der maximale Bruchteil der Fläche einer Ellipse $E$ vom Achsenverhältnis $\lambda = a/b$, den man mit zwei kongruenten, zu $E$ ähnlichen Ellipsen ohne gemeinsamen Flächenteil überdecken kann, wenn letztere ganz innerhalb von $E$ liegen?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

*Lösung des Aufgabenstellers:* Die beiden eingeschriebenen Ellipsen müssen sich offensichtlich im Mittelpunkt $O$ von $E$ berühren. Gibt es (*erster Fall*) eine zu $E$ ähnliche Ellipse $E'$, für welche die grosse Halbachse von $E$ Nebenachse ist, so ist $E'$ maximal. Das lineare Ähnlichkeitsverhältnis ist dann $a/2\,b = \lambda/2$. Der Vergleich der Krümmungen von $E$ und $E'$ im Berührungspunkt gibt die Bedingung

$$\frac{a^2}{b}\,\frac{\lambda}{2} \leqq \frac{b^2}{a} \quad \text{oder} \quad \lambda \leqq \sqrt[4]{2} .$$

Die relative Flächenbedeckung $\Phi$ von $E$ durch die beiden Ellipsen $E'$ ist $\lambda^2/2$.

Eine maximale Ellipse $E'$ durch $O$ kann $E$ höchstens dann in einem einzigen Punkt berühren, wenn dieser ein Scheitel ist. Für einen Nebenscheitel von $E$ wäre $\Phi = 1/2$, was nicht optimal ist. Es sei nun (*zweiter Fall*) $E'$ doppelt berührend. Die Gleichungen von $E$ und $E'$ seien

$$E\colon\ b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0 , \qquad E'\colon\ f(x) \equiv b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 + a^2 b^2 (\alpha x + \beta y - 1)^2 = 0 ,$$

wobei $\alpha x + \beta y - 1 = 0$ die Gleichung der Berührungssehne ist. Für den Kegelschnitt $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ (in homogenisierten rechtwinkligen Koordinaten) ist

$$J = \frac{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}{(a_{11} + a_{22})^2}$$

eine Ähnlichkeits-Invariante ($4\,J = \operatorname{tg}^2\varphi$, mit $\varphi$ als Winkel zwischen den beiden (in unserem Fall imaginären) Asymptoten). Die Anwendung dieser Formel auf $E$ und $E'$ führt auf die Bedingung

$$(a^2 + b^2)^2 (1 + \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2) = [a^2 b^2 (\alpha^2 + \beta^2) + a^2 + b^2]^2$$