Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 1

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Verlängert man die Strecken u, v, w von Bild 6, so ergibt sich der Satz (Bild 7): Für 3 Strecken a', b', c' durch P, die parallel zu (und zwischen) den Seiten a, b, c verlaufen, gilt die Formel

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 2 .$$

Auch hier ist P nicht auf das Innere des Dreiecks beschränkt.

I. PAASCHE, München

LITERATUR

[1] J. BERKES, El. Math. *12*, 121–123 (1957).
[2] P. KNABE, Praxis d. Math. (PM) *3*, 42 (1961).
[3] L. KRONECKER, *Bemerkungen zur Determinantentheorie* (Auszüge aus Briefen an BALTZER), Crelle's J. *72*, 152–175 (1869) oder Werke I, Leipzig 1895, S. 235–269.
[4] R. LAEMMEL, Der math. u. natw. Unterr. (MNU) *6*, 170 (1953/54).
[5] I. PAASCHE, MNU *9*, 212–213 (1956/57).
[6] I. PAASCHE, Problem 57, PM *2*, 331 (1960).
[7] K. RIEDEL, Archimedes *14*, 72–73 (1962).
[8] A. ROHRBERG, PM *1*, 124–126 (1959).

Aufgaben

Aufgabe 469. Wie gross ist der maximale Bruchteil der Fläche einer Ellipse E vom Achsenverhältnis $\lambda = a/b$, den man mit zwei kongruenten, zu E ähnlichen Ellipsen ohne gemeinsamen Flächenteil überdecken kann, wenn letztere ganz innerhalb von E liegen?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Die beiden eingeschriebenen Ellipsen müssen sich offensichtlich im Mittelpunkt O von E berühren. Gibt es (*erster Fall*) eine zu E ähnliche Ellipse E', für welche die grosse Halbachse von E Nebenachse ist, so ist E' maximal. Das lineare Ähnlichkeitsverhältnis ist dann $a/2\,b = \lambda/2$. Der Vergleich der Krümmungen von E und E' im Berührungspunkt gibt die Bedingung

$$\frac{a^2}{b}\,\frac{\lambda}{2} \leq \frac{b^2}{a} \quad \text{oder} \quad \lambda \leq \sqrt[4]{2} .$$

Die relative Flächenbedeckung Φ von E durch die beiden Ellipsen E' ist $\lambda^2/2$.

Eine maximale Ellipse E' durch O kann E höchstens dann in einem einzigen Punkt berühren, wenn dieser ein Scheitel ist. Für einen Nebenscheitel von E wäre $\Phi = 1/2$, was nicht optimal ist. Es sei nun (*zweiter Fall*) E' doppelt berührend. Die Gleichungen von E und E' seien

$$E\colon\ b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0\,, \qquad E'\colon\ f(x) \equiv b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 + a^2 b^2 (\alpha x + \beta y - 1)^2 = 0\,,$$

wobei $\alpha x + \beta y - 1 = 0$ die Gleichung der Berührungssehne ist. Für den Kegelschnitt $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ (in homogenisierten rechtwinkligen Koordinaten) ist

$$J = \frac{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}{(a_{11} + a_{22})^2}$$

eine Ähnlichkeits-Invariante ($4\,J = \mathrm{tg}^2 \varphi$, mit φ als Winkel zwischen den beiden (in unserem Fall imaginären) Asymptoten). Die Anwendung dieser Formel auf E und E' führt auf die Bedingung

$$(a^2 + b^2)^2 (1 + \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2) = [a^2 b^2 (\alpha^2 + \beta^2) + a^2 + b^2]^2$$

oder mit $u = +\sqrt{1 + \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2}$,

$$(a^2 + b^2)\,u = a^2 b^2 (\alpha^2 + \beta^2) + a^2 + b^2 .$$

Zusammen mit der Definitionsgleichung für u findet man für α und β die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 a^2 (a^2 - b^2) &= a^2 (u^2 - 1) - (a^2 + b^2)(u - 1) \\ \beta^2 b^2 (a^2 - b^2) &= -b^2 (u^2 - 1) + (a^2 + b^2)(u - 1) . \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Damit α und β reell werden, muss $1 < u \leqq \lambda^2 = a^2/b^2$ gelten. Damit die Berührungssehne E reell trifft, muss $u \geqq \sqrt{2}$ sein. Für $\lambda^2 \leqq \sqrt{2}$ kann also keine Doppelberührung eintreten. Durch (1) ist (bis auf eine Spiegelung an einer der beiden Achsen oder am Mittelpunkt von E) eine Ellipse E' durch den Parameter u bestimmt. Wegen der Ähnlichkeit aller Ellipsen kann man statt der grössten Fläche von E' den grössten orthoptischen Kreis von E' suchen, dessen Durchmesser die Diagonale eines E' umbeschriebenen Rechtecks ist. Wählt man als Seiten des Rechtecks die Parallelen zu den Achsen von E, so findet man (aus den partiellen Ableitungen $f_y = 0$ bzw. $f_x = 0$) die Seitenlängen

$$\Delta x = \frac{2a}{u^2}\sqrt{(u^2 - 1)(1 + \beta^2 b^2)}\,, \qquad \Delta y = \frac{2b}{u^2}\sqrt{(u^2 - 1)(1 + \alpha^2 a^2)}\,.$$

Für die Diagonale d ergibt sich somit mittels (1)

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \frac{4(a^2 + b^2)(u^2 - 1)}{u^3}\,.$$

Die Funktion $u^{-1} - u^{-3}$ wächst mit $u > 1$, solange $u < \sqrt{3}$ ist. Liegt also λ im Intervall $\sqrt[4]{2} \leqq \sqrt{u} \leqq \lambda \leqq \sqrt[4]{3}$, so gibt $u = \lambda^2$ die maximale Ellipse E'. Aus (1) folgt $\beta = 0$; die Berührungssehne ist normal zur Hauptachse von E, und man erhält $\Phi = 2\,d^2/4\,(a^2 + b^2) = 2\,(\lambda^4 - 1)/\lambda^6$. Für $\lambda > \sqrt[4]{3}$ liegt das Maximum stets bei $u = \sqrt{3}$. Es wird $\beta \neq 0$, so dass die Berührungssehne schief zu den Achsen von E liegt. Hier ist $\Phi = 4/3\,\sqrt{3}$.

Aufgabe 470. K sei eine ebene konvexe beschränkte Punktmenge mit dem Flächeninhalt F, und Z ein beliebiger innerer Punkt von K. Die Gerade durch Z mit dem Richtungswinkel α ($0 \leqq \alpha < \pi$, Nullrichtung beliebig) hat mit K eine Strecke von der Länge $D(\alpha)$ gemeinsam. Dann gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{2}F < \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi D^2(\alpha)\,d\alpha \leqq F\,,$$

in der genau dann Gleichheit besteht, wenn K punktsymmetrisch und Z das Symmetriezentrum ist. OTMAR REUTTER, Ochsenhausen, Deutschland

Lösung: Da K beschränkt und konvex ist, existiert zu jedem Winkel α ein eindeutig bestimmter Radiusvektor durch Z mit Endpunkt auf dem Rand von K. Seine Länge sei $C(\alpha)$, und $C(\alpha)$ ist eine stetige Funktion von α. Es gilt

$$C(\alpha) + C(\pi + \alpha) = D(\alpha) \qquad 0 \leq \alpha < \pi$$

und

$$F = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} C^2(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} C^2(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} (D(\alpha) - C(\alpha))^2\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} D^2(\alpha)\,d\alpha - \int\limits_0^{\pi} D(\alpha)\,C(\alpha)\,d\alpha + \int\limits_0^{\pi} C^2(\alpha)\,d\alpha\,.$$

Wegen $0 < C(\alpha) < D(\alpha)$ für alle α folgt hieraus

$$F < \frac{1}{2}\int_0^\pi D^2(\alpha)\,d\alpha$$

und

$$F = \frac{1}{4}\int_0^\pi D^2(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{4}\int_0^\pi (D(\alpha) - 2\,C(\alpha))^2\,d\alpha \geq \frac{1}{4}\int_0^\pi D^2(\alpha)\,d\alpha$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $D(\alpha) = 2\,C(\alpha)$, das heisst $C(\alpha) = C(\pi + \alpha)$ ist für alle α, also wenn K symmetrisch bezüglich Z ist. J. SPILKER, Freiburg i. Br.

Aufgabe 471. Démontrer que si n est un entier > 2 et $F_n = 2^{2^n} + 1$, alors $F_n\,F_{n+1}\,F_{n+2}$ est un nombre pseudopremier. (Un nombre composé m est dit pseudopremier, s'il divise le nombre $2^m - 2$.) A. ROTKIEWICZ, Varsovie

1. Lösung: Ich beweise folgende Verallgemeinerung: Sei a eine gerade natürliche Zahl, k und n seien natürliche Zahlen mit $n + k + 1 \leq a^n$ und $F_n := a^{a^n} + 1$. Dann ist $m := F_n\,F_{n+1} \ldots F_{n+k}$ pseudoprim bezüglich a, das heisst m ist keine Primzahl und $m \mid a^{m-1} - 1$. Der Fall $a = k = 2$ ist die gestellte Aufgabe. Aus $(F_n - 2)\,F_n \mid (F_{n+1} - 2)$ folgt $m \mid F_{n+k+1} - 2$; wegen $n + k + 1 \leq a^n$ gilt $m \mid a^{F_n - 1} - 1$, und mit $(F_n - 1) \mid m - 1$ ergibt sich $m \mid a^{m-1} - 1$. Da m nach Definition zusammengesetzt ist, ist m pseudoprim bezüglich a.

J. SPILKER, Freiburg i. Br.

2. Lösung: In Verallgemeinerung der Aussage der Aufgabe gilt folgender *Satz:* Ist $a > 1$ eine natürliche Zahl und

$$F_n = 1 + a^{a^n} + a^{2a^n} + \cdots + a^{(a-1)a^n},$$

dann ist das Produkt $F_n\,F_{n+1} \ldots F_{n+r-1}$ (Faktorenzahl $r \geqq 2$) für jede natürliche Zahl $n \geqq r$ pseudoprim bezüglich a.

Im Sonderfall $a = 2$, den die Aufgabe betrifft, ist insbesondere schon das zweigliedrige Produkt $F_n\,F_{n+1}$ für jedes $n \geqq 2$ pseudoprim in bezug auf 2.

Beweis: Mit

$$A_n = a^{a^n} - 1 \quad \text{ist} \quad F_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \quad \text{also} \quad F_n\,F_{n+1} \ldots F_{n+r-1} = \frac{A_{n+r}}{A_n}.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung auf Grund des von mir angegebenen Satzes über Pseudoprimzahlen[1]). O. REUTTER, Ochsenhausen, Deutschland

Eine weitere Lösung sandte L. CARLITZ, Duke University, Durham (USA).

Aufgabe 472. a, b seien teilerfremde natürliche Zahlen. Die Anzahl der Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{b}{a}$$

in der Form nicht geordneter Paare natürlicher Zahlen x, y werde mit $L(b, a)$ bezeichnet. Man bestimme $L(1, a)$, $L(2, a)$ und $L(4, a)$ in expliziter Form aus der Primzahlzerlegung von a. L. BERNSTEIN, Tel Aviv

Lösung (nach L. CARLITZ (Duke University)): Mit $(x, y) = r$, $x = r\,u$, $y = r\,v$, $(u, v) = 1$ geht die Gleichung der Aufgabe über in $r\,u\,v = a\,(u + v)$. Hier gilt $u \mid a$ und $v \mid a$, so dass $u\,v \mid a$. Setzt man $a = u\,v\,z$, so wird $r = z\,(u + v)$. Mit $G(t)$ bezeichnen wir die Anzahl der (nicht geordneten) Paare u, v, für die $(u, v) = 1$ und $u\,v = t$ gilt. Es ist $G(1) = 1$ und $G(t) = 2^{s-1}$, wenn s die Anzahl der verschiedenen Primteiler von t ist. Man hat

$$2\,G(u)\;2\,G(v) = 2\,G(u\,v)\,, \qquad (u, v) = 1\,,\; u \neq 1\,,\; v \neq 1\,. \tag{1}$$

[1]) Vgl. dieses Heft, S. 7.

Wegen $a = u\,v\,z$ gilt die Darstellung

$$L(1, a) = \sum_{t|a} G(t) . \tag{2}$$

Aus der kanonischen Zerlegung

$$a = \prod_i p_i^{e_i}$$

folgt bekanntlich

$$\sum_{t|a} t = \prod_i \left(1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{e_i}\right) . \tag{3}$$

Mit (1) ergibt sich, indem man p^k durch $2\,G(p^k) = 2$ ersetzt,

$$1 + \sum_{\substack{t|a\\ t \neq 1}} 2\,G(t) = \prod_i (1 + 2\,e_i) , \tag{4}$$

und hieraus

$$L(1, a) = \frac{1}{2}\left\{1 + \prod_i (1 + 2\,e_i)\right\} .$$

Für $b = 2$ erhält man wie vorher $2\,r\,u\,v = a\,(u + v)$, $(u, v) = 1$. Mit $a = u\,v\,z$ wird $2\,r = z\,(u + v)$. Weil a und damit u und v ungerade sind, ist r immer ganzzahlig. Wir haben also $L(2, a) = L(1, a)$.

Für $b = 4$ und (ungerades) $a = u\,v\,z$ wird $4\,r = z\,(u + v)$. Somit ist notwendig, dass $u + v \equiv 0 \pmod 4$, also etwa $u \equiv 1 \pmod 4$ und $v \equiv 3 \pmod 4$. Jetzt gilt

$$L(4, a) = \sum_{\substack{t|a\\ t \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)}} G(t) .$$

Aus der kanonischen Darstellung

$$a = \prod_{i,j} p_i^{e_i} q_j^{f_j} , \qquad p_i \equiv 1 \pmod 4 , \qquad q_j \equiv 3 \pmod 4$$

ergibt sich analog zu (3)

$$\sum_{\substack{t|a\\ t \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)}} t = \frac{1}{2} \prod_i \left(1 + p_i + \cdots + p_i^{e_i}\right) \left\{\prod_j \left(1 + q_j + \cdots + q_j^{f_j}\right) - \prod_j \left(1 - q_j + \cdots + (-1)^{f_j} q_j^{f_j}\right)\right\} .$$

Analog zu (4) erhalten wir leicht (1 tritt als Teiler nicht auf!)

$$L(4, a) = \frac{1}{4} \prod_i (1 + 2\,e_i) \left\{\prod_j (1 + 2\,f_j) - (-1)^{\Sigma f_j}\right\} .$$

Eine weitere Lösung legte J. Spilker (Freiburg i. Br.) vor. Teillösungen sandten J. Gaebelein (Helmstedt) und K. Wolff (Glarus).

Neue Aufgaben

Aufgabe 493. Es seien $f(t)$, $g(t)$ zwei stetige periodische Funktionen mit der Periode $2\,\pi$, deren erste Fourier-Koeffizienten verschwinden:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin t\, dt = \int_0^{2\pi} g(t) \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} g(t) \sin t\, dt = 0 .$$

Ausserdem sei $g(t) > 0$. Dann hat $f(t)/g(t)$ wenigstens vier Extrema in $0 \leqq t < 2\,\pi$.

Dieser Satz enthält alle bekannten Sätze aus der Verwandtschaft des Vierscheitelsatzes. Man beweise ihn und finde neue Anwendungen.

H. Guggenheimer, Minneapolis (USA)

Aufgabe 494. Gegeben sei ein C^2-Oval und ein innerer Punkt O. Man berechne die Änderung der Stützfunktion (gemessen von O aus) relativ zu sich entsprechenden Punkten in einer Affinität, für die O Fixpunkt ist. H. GUGGENHEIMER, Minneapolis (USA)

Aufgabe 495. Man bestimme in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Einhüllende einer Ellipsenschar, wobei (0, 0) gemeinsamer Brennpunkt ist, alle Ellipsen dieselbe Hauptachse $2a$ haben und der Punkt $(s, 0)$ jeder Ellipse angehört $(0 < s < 2a)$.

F. GÖTZE, Jena

Aufgabe 496. Man zeige, dass die Gleichung

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 = 0$$

keine rationalen Lösungen mit $x_1 x_2 x_3 \neq 0$ hat. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Man betrachtet ein Dreieck ABC. Der Punkt P bewegt sich auf der Gerade AB. Zeige, dass die Umkreise der Dreiecke ACP und BCP sich unter einem konstanten Winkel δ schneiden.

   ▶ $\delta = \alpha + \beta$.

2. Gegeben sind ein fester Kreis k und ein fester Punkt A. Konstruiere den Winkel vorgeschriebener Grösse α mit dem Scheitelpunkt A, der aus k eine Sehne gegebener Länge ausschneidet.

   ▶ Methode: Drehung.

3. Einem Halbkreis ist ein Trapez einzubeschreiben, das einen Inkreis besitzt.

   ▶ Über dem Durchmesser ist ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, in dem eine Kathete gleich dem nichtanliegenden Hypotenusenabschnitt ist.

4. Jede Seite eines Dreiecks (a, b, c) ist Durchmesser eines Kreises. Man zieht die gemeinsamen Tangenten an je zwei dieser Kreise. Für die Tangentenabschnitte gilt

$$t_1 t_2 t_3 = (s-a)(s-b)(s-c) .$$

   ▶ $t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-(b-c)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}$ und so weiter.

5. Man zeichnet über der Strecke $2r$ den Halbkreis H und über den Radien die Halbkreise H_1 und H_2. Der Kreis k_1, der die drei Halbkreise berührt, hat den Radius $\varrho_1 = r/1\cdot 3$, der Kreis k_2, der H_1, H_2 und k_1 von aussen berührt, hat den Radius $\varrho_2 = r/3\cdot 5$. Der Kreis $k_3(\varrho_3)$ berührt H_1, H_2 und k_2 von aussen, und so weiter. Es gilt

$$\varrho_k = \frac{r}{(2k-1)(2k+1)} .$$

   ▶ Beweis durch vollständige Induktion. Aus dem Ergebnis ersieht man sofort

$$\sum_1^\infty {}_k \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} .$$