Zur Selbergschen Gleichung für die arithmetische Progression

Autor(en): **Rieger, G.J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 2

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23923

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zur Selbergschen Gleichung für die arithmetische Progression

Wir bezeichnen mit kleinen lateinischen Buchstaben natürliche Zahlen, mit p eine Primzahl, mit μ bzw. φ die Moebiussche bzw. Eulersche Funktion und mit $:=$ Gleichheit nach Definition. Die Konstante in $O(\ )$ hängt nur von k ab.

Ferner sei $\Lambda(n) := \log p$ für $n = p^a$ und 0 sonst,

$$\psi(x; k, l) := \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv l \bmod k}} \Lambda(n) \tag{1}$$

und $\psi(x) := \psi(x; 1, 1)$. Alle bisherigen elementaren Beweise des Primzahlsatzes bzw. des Primzahlsatzes für die arithmetische Progression gehen aus von einer Selbergschen Gleichung

$$\psi(x) \log x + \sum_{n < x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = 2\, x \log x + O(x) \tag{2}$$

bzw.

$$\psi(x; k, l) \log x + \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv l \bmod k}} \psi\left(\frac{x}{n}; k, \frac{l}{n}\right) \Lambda(n) = \frac{2\,x}{\varphi(k)} \log x + O(x) \tag{3}$$

für $(k, l) = 1$ oder einer Variante davon[1]. Ein besonders einfacher Beweis von (2) stammt von ISEKI und TATUZAWA[3]; es scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, dass sich auch (3) ähnlich kurz beweisen lässt, was hier geschehen soll. Insbesondere werden Charaktere vermieden. Die Methode liefert auch noch neue Beweise für allgemeinere Selbergsche Gleichungen wie etwa für Idealklassen mod f[4]) oder Restklassen ganzer Zahlen mod f eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers[5]) ohne neue Schwierigkeit.

Bekanntlich gilt

$$H(x; k, l) := \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv l \bmod k}} 1 = \left[\frac{x - l + k}{k}\right] = \frac{x}{k} + O(1) \tag{4}$$

und

$$H(x; k) := \sum_{\substack{n < x \\ (n,k)=1}} 1 = \frac{\varphi(k)}{k}\, x + R(x; k)\,, \qquad R(x; k) = O(1)\,. \tag{5}$$

Bekanntlich ist

$$\sum_{m < x} \frac{1}{m} = \log x + C_1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{6}$$

[1]) Vgl. etwa [3][2]).
[2]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 39.
[3]) Vgl. etwa [4], 66–67.
[4]) Vgl. [1].
[5]) Vgl. [2].

mit einer absoluten Konstanten C_1; aus (5) folgt durch Teilsummation wegen (6) noch

$$\sum_{\substack{m < x \\ (m,k)=1}} \frac{1}{m} = \frac{\varphi(k)}{k} (\log x + C_2) + O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{7}$$

mit einer nur von k abhängigen Konstanten C_2; aus (4) folgt durch Teilsummation

$$\sum_{\substack{m \leqq x \\ m \equiv l \bmod k}} \log \frac{x}{m} = \frac{x}{k} + O(\log x) \tag{8}$$

und aus (8) wegen $\log(x/m) = \log x - \log m$ und (4) noch

$$\sum_{\substack{m < x \\ m \equiv l \bmod k}} \log m = \frac{x}{k} \log x - \frac{x}{k} + O(\log x)\,. \tag{9}$$

Aus den Definitionen für μ und Λ folgert man bekanntlich unmittelbar

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = 1 \text{ bzw. } 0 \quad \text{für } n = \text{bzw.} > 1\,, \tag{10}$$

$$\sum_{d \mid n} \Lambda(d) = \log n \tag{11}$$

und daraus mit Hilfe der Möbiusschen Umkehrformel

$$\Lambda(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \log \frac{n}{d}\,. \tag{12}$$

Wegen der Definition von Λ ist

$$\sum_{\substack{n < x \\ (n,k)=1}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{\substack{p < x \\ (p,k)=1}} \frac{\log p}{p} + O(1) = \sum_{p < x} \frac{\log p}{p} + O(1)\,. \tag{13}$$

Aus der elementaren Primzahltheorie übernehmen wir die Formeln[6])

$$\sum_{p < x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1) \tag{14}$$

und

$$\psi(x) = O(x)\,. \tag{15}$$

Im Falle $(n, k) = 1$ ist unter der Restklasse $l/n \bmod k$ wie üblich die durch die Kongruenz $n y \equiv l \bmod k$ eindeutig bestimmte Restklasse $y \bmod k$ zu verstehen.

Hilfssatz. *Es seien k und l beliebige natürliche Zahlen, $F(\sigma; k, l)$ eine für $\sigma \geqq 1$ erklärte komplexwertige Funktion, welche nur von σ und der Restklasse $l \bmod k$ abhängt, und*

$$G(x; k, l) := \log x \sum_{\substack{n < x \\ (n,k)=1}} F\left(\frac{x}{n}; k, \frac{l}{n}\right); \tag{16}$$

[6]) Vgl. etwa [4], Satz 22 und (83).

dann gilt
$$\sum_{\substack{d\le x\\(d,k)=1}} \mu(d)\, G\left(\frac{x}{d};k,\frac{l}{d}\right) = F(x;k,l)\log x + \sum_{\substack{n\le x\\(n,k)=1}} \Lambda(n)\, F\left(\frac{x}{n};k,\frac{l}{n}\right). \tag{17}$$

Beweis. Durch Einsetzen von (16) in die linke Seite von (17) entsteht

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\substack{d\le x\\(d,k)=1}} \mu(d)\, G\left(\frac{x}{d};k,\frac{l}{d}\right) &= \sum_{\substack{d\le x\\(d,k)=1}} \mu(d)\log\frac{x}{d} \sum_{\substack{n\le (x/d)\\(n,k)=1}} F\left(\frac{x}{dn};k,\frac{l}{dn}\right)\\ &= \sum_{\substack{nd\le x\\(nd,k)=1}}\sum \mu(d)\log\frac{x}{d}\, F\left(\frac{x}{dn};k,\frac{l}{dn}\right).\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Das Paar n, d wird jetzt vermöge $m := n\,d$ ersetzt durch das Paar m, d; dann geht die Bedingung $n\,d \leqq x$ über in die Bedingungen $m \leqq x$, $d|m$; wir können also in (18) wegen $\log(x/d) = \log(x/m) + \log(m/d)$ fortfahren:

$$= \sum_{\substack{m\le x\\(m,k)=1}} F\left(\frac{x}{m};k,\frac{l}{m}\right) \sum_{d|m} \mu(d)\left(\log\frac{x}{m} + \log\frac{m}{d}\right),$$

woraus sich wegen (10) und (12) die rechte Seite von (17) und damit die Behauptung ergibt.

Satz. *Für* $x \geq 1$ *und* $(k, l) = 1$ *gilt* (3).

Beweis. Bei der zweimaligen Anwendung des Hilfssatzes schreiben wir F_1, G_1 und F_2, G_2 für F, G. Mit $F_1(x;k,l) := \psi(x;k,l)$ erhält man vermöge (16) und (1) zunächst

$$G_1(x;k,l) = \log x \sum_{\substack{n\le x\\(n,k)=1}} \sum_{\substack{d\le (x/n)\\ d\equiv (l/n) \bmod k}} \Lambda(d) = \log x \sum_{\substack{nd\le x\\ nd\equiv l \bmod k}}\sum \Lambda(d),$$

da wegen $(k, l) = 1$ und $n\,d \equiv l \bmod k$ von selbst $(n, k) = 1$ erfüllt ist. Das Paar n, d wird jetzt vermöge $m := n\,d$ ersetzt durch das Paar m, d; dann geht die Bedingung $n\,d \leqq x$ über in die Bedingungen $m \leqq x$, $d|m$; wegen (11) und (9) folgt

$$G_1(x;k,l) = \frac{x}{k}(\log x)^2 - \frac{x}{k}\log x + O\big((\log x)^2\big).$$

Mit

$$F_2(x;k,l) := \frac{1}{\varphi(k)}(x - C_2 - 1)$$

erhält man vermöge (16) wegen (7) und (5) noch

$$G_2(x;k,l) = \frac{x}{k}(\log x)^2 - \frac{x}{k}\log x + O(\log x).$$

Es folgt

$$G_1(x;k,l) - G_2(x;k,l) = O\big(\sqrt{x}\big).$$

Daher unterscheiden sich die linken Seiten von (17) für G_1 und G_2 um höchstens

$$\sum_{d\le x} O\left(\sqrt{\frac{x}{d}}\right) = O(x)$$

voneinander; also unterscheiden sich auch die rechten Seiten von (17) für F_1 und F_2 um höchstens $O(x)$ voneinander:

$$\left.\begin{aligned}\psi(x;k,l)\log x + \sum_{\substack{n<x\\(n,k)=1}} \psi\left(\frac{x}{n};k,\frac{l}{n}\right)\Lambda(n) = \\ = \frac{\log x}{\varphi(k)}(x - C_2 - 1) + \frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\substack{n<x\\(n,k)=1}}\Lambda(n)\left(\frac{x}{n} - C_2 - 1\right) + O(x)\,.\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Aus (19), (13), (14) und (15) folgt die Behauptung. G. J. RIEGER, München

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. J. RIEGER, *Ein weiterer Beweis der Selbergschen Formel für Idealklassen modf in algebraischen Zahlkörpern.* Math. Ann. *134*, 403–407 (1958).
[2] G. J. RIEGER, *Eine Selbergsche Identität für algebraische Zahlen,* Math. Ann. *145*, 77–80 (1962).
[3] W. SPECHT, *Elementare Beweise der Primzahlsätze* (Berlin 1956).
[4] E. TROST, *Primzahlen* (Basel/Stuttgart 1953).

Sur les nombres pseudopremiers carrés

On appelle pseudopremiers les nombres composés n tels que $n \mid 2^n - 2$. Dans le travail [4][1]) j'ai démontré qu'il existe une infinité de nombres pseudopremiers triangulaires. Ici je démontrerai la proposition suivante:

Théorème. *Les seuls nombres pseudopremiers* $< 10^{12}$ *qui sont carrés sont les nombres* 1093^2 *et* 3511^2.

Lemme. *Si* n^2 (où n est un entier positif) *est un nombre pseudopremier, alors pour tout diviseur premier* p *de* n *on a* $p^2 \mid 2^{p-1} - 1$.

Démonstration du lemme. Soit n^2 un nombre pseudopremier. On a alors $2 \nmid n$, puisqu'il n'existe aucun nombre pseudopremier divisible par 4. Il résulte donc de $n^2 \mid 2^{n^2} - 2$ que $n^2 \mid 2^{n^2-1} - 1$. Supposons que p est un nombre premier >2 tel que $p \mid n$ et soit δ l'exposant auquel appartient le nombre $2 \bmod p$. Si $p^2 \mid 2^\delta - 1$ on a, d'après $\delta \mid p-1$, $p^2 \mid 2^{p-1} - 1$. Supposons que $p^2 \nmid 2^\delta - 1$. Alors, pour qu'on ait $p^2 \mid 2^x - 1$ où x est un entier positif, il faut qu'on ait $p\,\delta \mid x$ (voir [5], p. 52). Donc, d'après $p^2 \mid n^2 \mid 2^{n^2-1} - 1$ on a $p \mid n^2 - 1$, ce qui est impossible, vu que $p \mid n$. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Démontration du théorème. Les nombres $p^2 = 1093^2$ et $p^2 = 3511^2$ sont pseudopremiers, puisqu'on a pour ces nombres

$$p^2 \,\big|\, 2^{p-1} - 1 \,\big|\, 2^{p^2-1} - 1 \,\big|\, 2^{p^2} - 2\,.$$

---

[1]) Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 40.