Programmation linéaire et enseignement secondaire

BO und $B'O$ sind Strecken im Sinn unserer Definition 3, weil dies auch für BA' und $B'A$ gilt. Nun gilt:
$$\triangle\, S\,B\,O \cong \triangle\, S\,B'\,O \quad \text{(Kongruenzsatz I)}$$
Daraus folgt:
$$\sphericalangle\, B\,S\,O = \sphericalangle\, B'\,S\,O\,.$$

Gäbe es ausser $S\,O$ noch eine 2. Winkelhalbierende, so würde das zu einem Widerspruch mit Axiom III, 4 führen. Die Halbierung des gestreckten Winkels ergibt sich aus Satz IX, dessen Beweis genau so wie in der absoluten Geometrie verläuft und deswegen hier nicht durchgeführt wird. (Fortsetzung im nächsten Heft).

J. MALL, Weiden/BRD.

Programmation linéaire et enseignement secondaire

Dans un excellent article de cette revue (El. Math. *16*, 1–12 (1961)) M. H. P. KÜNZI a exposé les grandes lignes de la programmation linéaire[1]). Il pense avec raison que les éléments de cette théorie ont leur place dans les programmes de certaines classes de l'enseignement secondaire[2]). Les élèves auraient l'occasion, rare, d'utiliser des inégalités et celle de résoudre des problèmes qui se posent dans la pratique.

Dans un enseignement élémentaire de la programmation linéaire, on résout souvent *graphiquement* quelques problèmes (voir la page 2 de l'article cité) avant d'aborder la méthode du simplexe. On choisit des exemples comprenant chacun une fonction de *deux* variables et un certain nombre de contraintes (inégalités).

Les valeurs des variables sont portées en abscisses et en ordonnées; les contraintes peuvent être aussi nombreuses que l'on veut.

Il serait aussi très intéressant de résoudre *graphiquement* des problèmes à plus de deux variables, le nombre des contraintes étant de *deux*.

Ce dernier cas est bien connu[3]), pas autant cependant qu'on pourrait le croire. Un ouvrage aussi réputé, à juste titre, que les «Mathematical Economics» de R. G. D. ALLEN l'ignore puisqu'on y lit que de tels problèmes ne sont pas résolubles graphiquement (exercices 6, page 538; 4, page 541; 3, page 544).

Envisageons l'exemple suivant:

On connaît les prix de 3 aliments, A_1, A_2, A_3, la teneur en protides et le nombre de calories fournies par kilogramme.

Les besoins minimaux en calories et en protides par personne et par jour sont donnés.

(I)

	A_1 par kg	A_2	A_3	Besoins par personne et par jour
Prix (f/kg)	1	4	3	
Calories (1000)	2	5	4	3
Protides (50 g)	1	7	4	2

[1]) Conférence donnée le 13 octobre 1960 lors de l'assemblée annuelle de la société suisse des professeurs de mathématiques et de physique.
Voir aussi «*Nichtlineare Programmierung*», par H. P. KÜNZI et W. OETTLI, El. Math. *18*, 1–8 (1963). n° 1, page 1 à 8, 10 janvier 1963.

[2]) Cf. «*Le rôle des mathématiques dans les écoles de commerce*», P. BURGAT, Revue suisse pour l'enseignement commercial, 6e cahier, 56e année, juillet 1962, pages 128 à 136.

[3]) Il figure dans plusieurs ouvrages destinés aux économistes.

Il s'agit de satisfaire aux besoins minimaux tout en dépensant le moins possible.

Désignons par x_1, x_2, x_3 les quantités, en kg, de A_1, A_2, A_3 indispensables quotidiennement et par z le coût.

Le problème (de programmation linéaire) à résoudre est le suivant:

Fonction à min.: $$z = x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3\,.$$

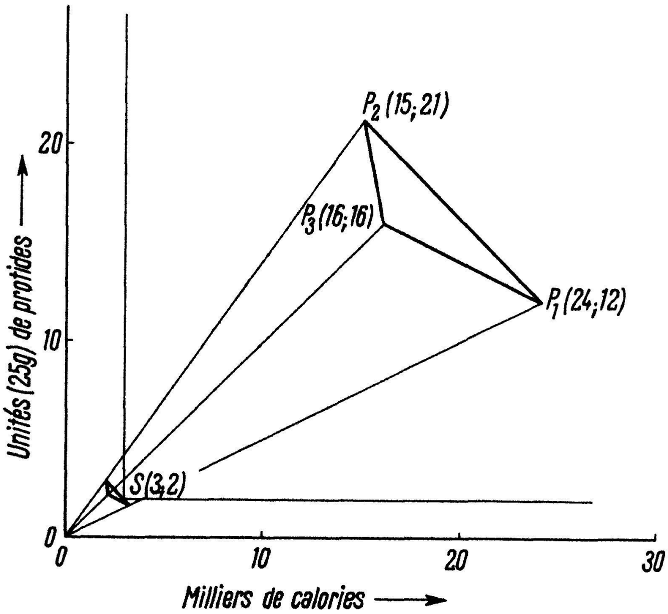
Contraintes: $$\begin{cases} 2\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 \geqslant 3\,, \\ x_1 + 7\,x_2 + 4\,x_3 \geqslant 2\,. \end{cases}$$

De plus, $\forall i,\ i \in \{1, 2, 3\},\ x_i \geqslant 0$.

Le p. p. c. m. des prix est 12. En admettant la proportionnalité des prix aux poids, on peut passer de (I) au tableau suivant:

	A_1	A_2	A_3	Besoins par personne et par jour
Prix	12	12	12	
Calories (1000)	24	15	16	3
Protides (50 g)	12	21	16	2

Construisons un graphique, les *unités* étant, en abscisse, 1000 calories, en ordonnée, 50 g de protides.



Si nous dépensons 12 f et n'achetons qu'un aliment, A_1, A_2 ou A_3, nous obtenons respectivement:

12 kg, soit $24 \cdot 10^3$ cal. et $12 \cdot 50$ g de prot. représentés par P_1 (24; 12),
3 kg, soit $15 \cdot 10^3$ cal. et $21 \cdot 50$ g de prot. représentés par P_2 (15; 21),
4 kg, soit $16 \cdot 10^3$ cal. et $16 \cdot 50$ g de prot. représentés par P_3 (16; 16).

$\forall i,\ i \in \{1, 2, 3\}$, posons $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{OP}_i$. Les composantes numériques de $\boldsymbol{p}_i$ indiquent le nombre de milliers de calories et le nombre d'unités (50 g) de protides fournis par A_i, pour 12 f.

Si nous renonçons à l'achat d'un aliment seulement, de A_3 par exemple, nous obtenons pour le même prix ξ milliers de calories et η unités de protides, ξ et η étant les composantes du rayon vecteur

$$\lambda\, \boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\, \boldsymbol{p}_2\,, \quad 0 < \lambda < 1\,. \tag{1}$$

Comme $\lambda\, \boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\, \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\,(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)$, les points du segment $P_1 P_2$ et ces points-là seulement correspondent à un achat de 12 f dans lequel A_3 n'entre pas.

De même les points des segments $P_2 P_3$ et $P_3 P_1$ correspondent respectivement à des achats de 12 f dans lesquels A_1 ou A_2 ne figure pas.

Supprimons toute restriction relative au nombre des aliments achetés. Pour 12 f, nous avons affaire au rayon vecteur

$$\lambda\, \boldsymbol{p}_1 + \mu\, \boldsymbol{p}_2 + (1-\lambda-\mu)\, \boldsymbol{p}_3\,, \tag{2}$$

avec

$$0 \leq \lambda \leq 1\,, \quad 0 \leq \mu \leq 1\,, \quad \lambda + \mu \leq 1\,.$$

Le vecteur (2) est égal à

$$\boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\,(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1) + \mu\,(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3)\,. \tag{3}$$

L'extrémité du rayon vecteur $\boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\,(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1)$ est sur le segment $P_1 P_3$.

Comme $0 \leq \mu \leq 1 - \lambda$, le rayon vecteur (3), qui peut s'écrire

$$\boldsymbol{O P}_1 + (1-\lambda)\, \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_3 + \mu\, \boldsymbol{P}_3 \boldsymbol{P}_2,$$

a son extrémité *dans le triangle* $P_1 P_2 P_3$ *ou sur son contour.*

Réciproquement, on voit immédiatement que tout point de cette surface correspond à un achat de 12 f.

Une homothétie de centre O et de rapport positif r nous donne le triangle relatif à un achat de 12 r francs.

Tenons compte maintenant des besoins en calories et en protides. Graphiquement nous traçons les demi-droites d'origines $S(3;\, 2)$, parallèles aux axes de coordonnées et situées dans le premier quadrant.

Pour que la dépense soit minimale, il faut que le rapport d'homothétie r soit le plus petit possible.

Pour qu'il n'y ait pas carence de calories ni de protides, il faut que l'intersection de l'ensemble des points du triangle homothétique de $P_1 P_2 P_3$, contour compris, et de l'ensemble des points de l'angle droit de sommet S, côtés compris, ne soit pas vide.

On obtient donc la solution (optimale) à l'aide du triangle dont le côté parallèle à $P_1 P_2$ passe par S (voir la figure). Elle ne fait intervenir que A_1 et A_2.

Les coordonnées de l'extrémité du rayon vecteur (1) sont $15 + 9\lambda$ et $21 - 9\lambda$. En résolvant l'équation

$$\frac{15 + 9\lambda}{21 - 9\lambda} = \frac{3}{2}\,,$$

on obtient la valeur du paramètre qui correspond au point de $P_1 P_2$ dont l'homothétique sur le triangle optimal est $S(3;\, 2)$.

On trouve $\lambda = 11/15$ puis le rapport d'homothétie $r = 5/36$ et enfin $x_1 = 11/15 \cdot 5/36 \cdot 12$ kg $= 11/9$ kg et $x_2 = 4/15 \cdot 5/36 \cdot 3$ kg $= 1/9$ kg.

La solution (optimale) est donc $x_1 = 11/9$, $x_2 = 1/9$, $x_3 = 0$.

La résolution «graphique» de ce problème constitue une application intéressante des éléments de calcul vectoriel. Elle se généralise immédiatement à plus de 3 variables et se prête à des discussions. Enfin, elle a le mérite de montrer à l'élève que des moyens très simples quoique légèrement «détournés» permettent parfois d'obtenir un résultat inaccessible par un procédé direct, celui de la résolution graphique habituelle en l'occurrence; elle peut inciter l'élève à faire preuve d'ingéniosité.

P. BURGAT, Neuchâtel

Sur les nombres pseudopremiers de la forme $M_p M_q$

Je démontrerai ici les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. *Le nombre $p\,q$, où p et $q > p$ sont des nombres premiers, est un nombre pseudopremier*[1]) *dans ce et seulement dans ce cas si le nombre $M_p M_q = (2^p - 1)(2^q - 1)$ est pseudopremier.*

Théorème 2. *Pour tout nombre premier p, où $7 < p \neq 13$, il existe un nombre premier q tel que le nombre $M_p M_q$ est pseudopremier. Pour $p = 2, 3, 5, 7$ et 13 il n'existe aucun nombre premier q pour lequel le nombre $M_p M_q$ soit pseudopremier.*

Démonstration du théorème 1. Supposons que le nombre $p\,q$, où p et $q > p$ sont des nombres premiers, est pseudopremier. On a alors $p > 2$. En effet, s'il était $2\,q \mid 2^{2q} - 2$, on aurait $q \mid 2^{2q-1} - 1$, ce qui est impossible, vu que

$$2^{2q-1} - 1 = 2^{2(q-1)}\,2 - 1 \equiv 1 \pmod q$$

(d'après le théorème de FERMAT). Vu que $q > p$, les nombres p et q sont tous les deux impairs et la formule $p\,q \mid 2^{pq} - 2$ (puisque le nombre $p\,q$ est pseudopremier) donne $p\,q \mid 2^{pq-1} - 1$. Or, on a

$$2^{pq-1} - 1 = 2^{(p-1)q}\,2^{q-1} - 1 \equiv 2^{q-1} - 1 \pmod p\,.$$

On a donc $p \mid 2^{q-1} - 1$ et, vu que $q \mid 2^{q-1} - 1$ et $q > p$, on en trouve que

$$p\,q \mid 2^{q-1} - 1 \mid 2^q - 2.$$

Pareillement on démontre que $p\,q \mid 2^p - 2$. On a donc $2^p - 1 \equiv 1 \pmod{p\,q}$ et $2^q - 1 \equiv 1 \pmod{p\,q}$, d'où $M_p M_q \equiv 1 \pmod{p\,q}$ et, comme $(2^p - 1,\ 2^q - 1) = 2^{(p,q)} - 1 = 1$, on trouve

$$M_p M_q = (2^p - 1)(2^q - 1) \mid 2^{pq} - 1 \mid 2^{M_p M_q - 1} - 1 \mid 2^{M_p M_q} - 2$$

et le nombre $M_p M_q$ est pseudopremier.

Supposons maintenant que le nombre $M_p M_q$ est pseudopremier. On a donc

$$(2^p - 1)(2^q - 1) \mid 2^{M_p M_q - 1} - 1\,. \tag{1}$$

Le nombre 2 appartenant à l'exposant p modulo 2^p-1, il résulte de (1) que $p \mid M_p M_q - 1$.

[1]) C'est-à-dire un nombre composé n qui divise $2^n - 2$.