Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 5

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Ein Beweis des Wilsonschen Satzes

Sei p eine ungerade Primzahl. Die Vandermondesche Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \ldots & 2^{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & p-1 & (p-1)^2 & \ldots & (p-1)^{p-2} \end{vmatrix}$$

ist nicht durch p teilbar. Multipliziert man die Zeilen der Reihe nach mit $1, 2, \ldots, p-1$, so bekommt man nach dem Fermatschen Satz

$$(p-1)!\,D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 4 & 8 & \ldots & 2^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p-1 & (p-1)^2 & (p-1)^3 & \ldots & (p-1)^{p-1} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & \ldots & 2^{p-2} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p-1 & (p-1)^2 & (p-1)^3 & \ldots & (p-1)^{p-2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{p-2} D = -D \pmod{p}, \quad \text{also} \quad (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

JÁNOS SURÁNYI, Eötvös-Loránd Universität, Budapest

Aufgaben

Aufgabe 485. Die Treffwahrscheinlichkeit eines Schusses sei w und w_s bedeute die Wahrscheinlichkeit, dass von total n unter gleichbleibenden Bedingungen abgegebenen Schüssen mindestens s Treffer sind. Man beweise die Beziehung

$$w\,\frac{dw_s}{dw} = s\,(w_s - w_{s+1})\,.$$

H. BRÄNDLI, Zürich

Lösung: Es gibt $\binom{n}{s}$ verschiedene Möglichkeiten, dass in einer Serie von n Schüssen s Treffer und $n-s$ Nichttreffer auftreten, da sich die möglichen Ausfälle in der Reihenfolge des Auftretens von Treffern und Nichttreffern unterscheiden. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Serie von n Schüssen genau s Treffer zu erzielen

$$z_s = \binom{n}{s} w^s (1-w)^{n-s} \qquad (s = 0, 1, \ldots, n)\,,$$

und somit die Wahrscheinlichkeit, in einer Serie von n Schüssen mindestens s Treffer zu erzielen

$$w_s = \sum_{k=s}^{n} z_k = \sum_{k=s}^{n} \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k} \qquad (s = 0, 1, \ldots, n)\,.$$

Aus dieser Darstellung von w_s folgt

$$w\,\frac{dw_s}{dw} = w \sum_{k=s}^{n} k \binom{n}{k} w^{k-1} (1-w)^{n-k} - w \sum_{k=s}^{n-1} (n-k) \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k-1}$$

$$= s \binom{n}{s} w^s (1-w)^{n-s} + \sum_{k=s+1}^{n} k \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k}$$

$$- \sum_{k=s+1}^{n} (n-k+1) \binom{n}{k-1} w^k (1-w)^{n-k}$$

$$w \frac{dw_s}{dw} = s\,(w_s - w_{s+1}) + \sum_{k=s+1}^{n} \left[k \binom{n}{k} - (n-k+1)\binom{n}{k-1}\right] w^k (1-w)^{n-k}$$

$$= s\,(w_s - w_{s+1})\,, \quad \text{da} \quad k\binom{n}{k} - (n-k+1)\binom{n}{k-1} = 0 \quad \text{ist.}$$

O. REUTTER, Ochsenhausen

Weitere Lösungen sandten R. INEICHEN (Luzern), L. KIEFFER (Luxemburg) H. MEILI (Winterthur), K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgaben 486. Wie gross ist die maximale Anzahl spitzer Winkel eines n-Ecks ohne Überschneidungen? H. BLUMER, Winterthur

Lösung: Ist s die Anzahl der spitzen, also $n - s$ die Anzahl der stumpfen Winkel eines n-Ecks, dann genügt die Winkelsumme des n-Ecks trivialerweise der Ungleichung $(n-2)\,\pi < s\,\pi/2 + (n-s)\,2\,\pi$. Daraus folgt $s < 2\,(n+2)/3$, also $s \leqq [(2n+3)/3]$. Diese Abschätzung gilt insbesondere auch für die maximale Anzahl s_m der spitzen Winkel. Die Vermutung, dass $s_m = [(2n+3)/3]$ ist, erweist sich in der Tat als richtig. Man kann nämlich ein n-Eck konstruieren, das diese Anzahl spitzer Winkel und zudem die Eigenschaft besitzt, dass alle spitzen Winkel die gleiche Grösse α und alle stumpfen die gleiche Grösse β haben $(n > 3)$: Wird α im Intervall $n\,\pi/(2n+3) < \alpha < \pi/2$ gewählt, dann ist β durch die Gleichung $s_m\,\alpha + (n - s_m)\,\beta = (n-2)\,\pi$ eindeutig bestimmt und liegt im Intervall $\pi/2 < \beta < 2\,\pi$, wie man leicht nachprüft. Nun konstruiert man, im Endpunkt P_1 eines Strahls a beginnend, einen Polygonzug mit den Winkeln α, α, β in periodisch fortgesetzter Folge, und wählt dabei die Länge der Polygonstrecken $P_k\,P_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n-2)$ so, dass der entstehende Streckenzug weder sich selbst noch den Strahl a überschneidet, was stets erreicht werden kann. Die letzte, von P_{n-1} ausgehende Polygonstrecke kann dann so lang gemacht werden, dass sie den Strahl a in einem Punkt P_n trifft, denn diese Strecke schliesst mit a «automatisch» den spitzen Winkel α ein. Das auf diese Weise konstruierte geschlossene, doppelpunktfreie Polygon $P_1 \ldots P_n$ besitzt dann offenbar die oben angegebenen Eigenschaften. O. REUTTER, Ochsenhausen

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), F. LEUENBERGER (Feldmeilen), G. POLLARD (London).

Aufgabe 487. Die Kurve $x_1^2\,x_2 + x_2^2\,x_3 + x_3^2\,x_1 = 0$ sei auf ein gleichseitiges Koordinatendreieck bezogen (Einheitspunkt im Mittelpunkt M). Man ermittle (im gleichen Koordinatensystem) die Gleichung des Kreises um M, der die drei (kongruenten) Äste der Kurve berührt. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Der Umkreis des Koordinatendreiecks hat die Gleichung $x_1\,x_2 + x_2\,x_3 + x_3\,x_1 = 0$, die unendlich ferne Gerade ist $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ein beliebiger Kreis K_λ um M hat also die Gleichung

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - \lambda\,(x_1\,x_2 + x_2\,x_3 + x_3\,x_1) = 0\,.$$

Für die sechs Schnittpunkte eines solchen Kreises mit der gegebenen Kurve C_3 findet man, wenn man $x_3 = 1$ setzt und x_2 eliminiert, eine Gleichung sechsten Grades in x_1, deren linke Seite im Fall der Berührung das Quadrat eines kubischen Polynoms $x_1^3 + \alpha\,x_1^2 + \beta\,x_1 + \gamma$ sein muss. Koeffizientenvergleich in dieser Identität führt nach Elimination von α, β, γ auf die Gleichung

$$\lambda^3 - 12\,\lambda^2 + 36\,\lambda - 36 = 0$$

mit der einzigen reellen Lösung $\lambda = 4 + 2^{2/3} + 2^{4/3} = 8{,}1072\ldots$ Die Gleichung des Berührungskreises ist also

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (4 + 2^{2/3} + 2^{4/3})\,(x_1\,x_2 + x_2\,x_3 + x_3\,x_1) = 0\,.$$

Eine ausführliche Lösung sandte K. ZACHARIAS (Berlin).

Ausgabe 488. Démontrer que s étant un nombre naturel donné et $n_1, n_2, \ldots, n_s$ une suite de s nombres naturels donnés quelconques, ils existent toujours des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_s$ et b tels que l'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_s x_s = b \qquad (1)$$

a une seule solution en nombres naturels $x_1, x_2, \ldots, x_s$, notamment $x_i = n_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$.
W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Lösung: Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_s$ paarweise teilerfremde natürliche Zahlen und $A_i \geqq n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Ist $P = A_1 A_2 \ldots A_s$, dann genügen die Zahlen $a_i = P/A_i$ den Bedingungen.

Beweis: Ist $y_1, y_2, \ldots, y_s$ eine von $x_1 = n_1, x_2 = n_2, \ldots, x_s = n_s$ verschiedene Lösung der Gleichung

$$\sum a_i x_i = b = \sum a_i n_i ,$$

so setze man $y_i = n_i + d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Es gilt dann $\sum a_i d_i = 0$. a_i ist zu A_i teilerfremd, aber teilbar durch jedes A_k mit $k \neq i$. Weil $\sum a_i d_i$ durch A_i teilbar ist, muss d_i durch A_i teilbar sein. Wären die beiden Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_s$ und $y_1, y_2, \ldots, y_s$ verschieden, so gäbe es einen Index j mit $d_j < 0$. Dann gilt aber $|d_j| \geqq A_j \geqq n_j$ und somit ist $y_j \leqq 0$, also keine natürliche Zahl.
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Eine weitere Lösung sandte O. REUTTER (Ochsenhausen).

Neue Aufgaben

Aufgabe 509. Auf einer Geraden g liegen drei Punkte A, B, C derart, dass A ausserhalb der Strecke BC liegt und die Strecke AB kleiner als die Strecke AC ist. A sei Doppelpunkt, B und C seien Scheitel einer verschlungenen Pascalschnecke c (c = rationale Quartik mit Spitzen in den absoluten Kreispunkten).

Man ermittle eine gestreckte Pascalschnecke c^*, die den gleichen Umfang besitzt wie c.
R. BEREIS, Dresden

Aufgabe 510. Es ist zu beweisen, dass in einem Parallelepiped-Gitter alle vierseitigen konvexen Pyramiden mit Gitterpunkt-Ecken, die keine weiteren Gitterpunkte weder im Innern noch auf der Oberfläche enthalten, denselben Inhalt haben. Ist die Forderung der Konvexität notwendig?
JÁNOS SURÁNYI, Budapest

Aufgabe 511. Ist G eine primitive Permutationsgruppe und ist N ein nicht trivialer Normalteiler von G, so ist N transitiv. (Beim Beweis benutze man, dass die Standuntergruppe einer Ziffer in G maximal ist.)
R.-H. SCHULZ, Mainz

Aufgabe 512. Es seien, n, k, m, r, s, natürliche Zahlen, $d(n)$ die Anzahl aller Teiler von n und man setze

$$D_s^{(r)} = \sum_{k \mid n^s} \{d(k)\}^r , \quad d_s = d(n^s) .$$

Dann gilt

$$D_{2m}^{(1)} = d_m d_{2m} , \quad D_{6m}^{(2)} = d_{3m} d_{4m} d_{6m} , \quad D_{2m}^{(3)} = d_m^2 d_{2m}^2 .$$

E. TROST, Zürich

Aufgaben für die Schule

1. Sind die Halbierenden zweier Winkel parallel, so bestimmen deren Schenkel ein Sehnenviereck (CATALAN, 1886). Zeichne verschiedene derartige Winkelpaare und ziehe jedesmal das Sehnenviereck aus.

2. Für $x\,y\,z = a\,b\,c$ gilt

$$\frac{b\,x}{x\,y + b\,(a + x)} + \frac{c\,y}{y\,z + c\,(b + y)} + \frac{a\,z}{z\,x + a\,(c + z)} = 1\,.$$

(CATALAN, 1886)

▶ Setze $x = \lambda\,a,\ y = \mu\,b,\ z = \nu\,c,$ mit $\lambda\,\mu\,\nu = 1$.

3. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse AB gegeben. Die Höhe sei CC'. Das Dreieck soll so bestimmt werden, dass $AC' + CC'$ ein Maximum wird (FERMAT, 1629).

▶ Ist M der Mittelpunkt der Hypotenuse, so wird $\sphericalangle\ BMC = 45°$.

4. GABRIEL CRAMER, Genf 1750, diskutierte «la courbe du diable» mit der Gleichung

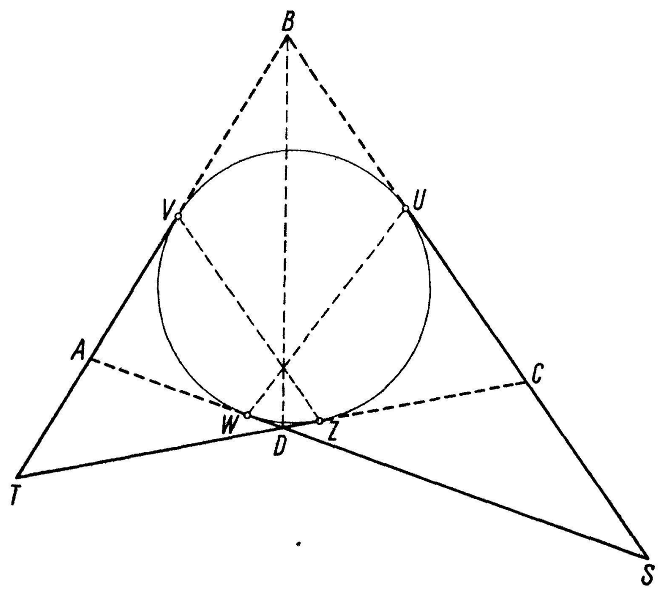
$$y^4 - x^4 + 100\,a^2\,x^2 - 96\,a^2\,y^2 = 0\,.$$

Bestimme die Punkte dieser Kurve auf der y-Achse, sowie die Ableitungen in diesen Punkten.

▶ $y_{1,2} = \pm\,4\sqrt{6}\,a,\quad y'_{1,2} = 0;\qquad y_{3,4} = 0,\quad y'_{3,4} = \pm\dfrac{5}{2\sqrt{6}}\,.$

5. Vier Punkte eines Kegelschnittes bestimmen ein Sehnenviereck, die Tangenten in diesen Punkten ein Tangentenviereck. Die Diagonalen dieser zwei Vierecke schneiden sich in einem Punkt.

▶ Da es sich um eine projektive Eigenschaft handelt, genügt es, sie für den Kreis zu beweisen. So ergibt sich der Satz von NEWTON, 1687. Er kann mit den Mitteln der Darstellenden Geometrie folgendermassen bewiesen werden:



Die Figur wird aufgefasst als Normalprojektion eines räumlichen Gebildes. Der Kreis liegt in der Projektionsebene, die Tangenten sind die Projektionen von Geraden, die den Neigungswinkel 45° und die Spurpunkte U, V, W, Z besitzen. S, T, D, B sind die Projektionen echter Schnittpunkte. BD ist Projektion der Schnittgerade zweier Ebenen mit den Spuren UW und VZ. Beweis für die zweite Diagonale AC, wenn T eine negative Kote hat.