Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 20 (1965)
Heft: 6

Artikel: Axiomatischer Aufbau der sphärisch-elliptischen Geometrie, 2. Teil
Autor: Mall, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23935

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

[5] A. OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I* (Birkhäuser, Basel 1945).
[6] P. ROSSIER, *Équations fonctionnelles et mathématiques supérieures élémentaires*, El. Math. *1*, 81–87 (1946).
[7] C. L. SEEBECK and J. W. JEWETT, *A Development of Logarithms Using the Function Concept*, Amer. Math. Monthly *64*, 667–668 (1957).
[8] C. L. SEEBECK and H. C. MILLER JR., *More About Logarithms*, Amer. Math. Monthly *65*, 697–698 (1958).

Axiomatischer Aufbau der sphärisch-elliptischen Geometrie

(Fortsetzung)

2. Teil

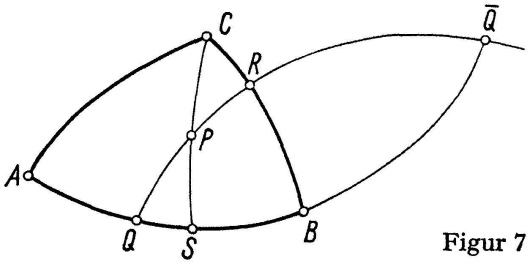
Die Winkelsumme im sphärisch-elliptischen Dreieck

Im folgenden soll nach Beweis einiger Hilfssätze gezeigt werden, dass im sphärisch-elliptischen Dreieck die Winkelsumme grösser als 2 R ist. Wegen des von der absoluten Geometrie abweichenden Axiomensystems der sphärisch-elliptischen Geometrie werden die Geraden wieder krummlinig gezeichnet. Sämtliche hier durchgeführten Überlegungen sind jedoch unabhängig von einem der speziellen Modelle für die sphärisch-elliptische Geometrie.

Hilfssatz 1. Verbindet man einen Punkt P im Innern eines Dreiecks mit einer Ecke, so enthält die Verbindungsgerade einen Punkt der Gegenseite.

Unter einem Punkt im Innern eines Dreiecks versteht man dabei einen Punkt, der im Innern aller drei Dreickswinkel (siehe die Bemerkungen im Anschluss an Axiom II, 6) liegt.

Beweis von Hilfssatz 1:



Figur 7

Auf der Strecke AB existiert (Figur 7) nach Axiom II, 2 und Definition 4 ein Punkt Q zwischen A und B derart, dass $(A\ Q\ B)$ gilt.

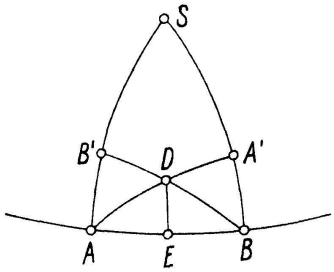
Die Gerade QP hat gemäss Axiom II, 6 angewandt auf das Dreieck ABC entweder mit AC oder BC einen Punkt R gemeinsam, so dass entweder $(A\ R\ C)$ oder $(B\ R\ C)$ gilt. Geht $Q\ P$ speziell durch C, ist bereits alles bewiesen.

Wir nehmen an, dass R zwischen B und C liegt. Für das Dreieck QBR gilt nun: $QB < AB$ und $RB < BC$, QB und RB sind daher Strecken gemäss Definition 3. Für QR ist das noch zu beweisen. QR muss wegen I, 5 durch den Punkt $\overline{Q}$ auf der Geraden durch AB hindurchgehen. Da QB die Streckendefinition erfüllt, muss $\overline{Q}$ ausserhalb der Strecke QB liegen. Da AQ ebenfalls die Streckendefinition erfüllt, ist

$\overline{Q}$ auch ein Punkt ausserhalb der Strecke AQ. $\overline{Q}$ muss daher ausserhalb der Strecke AB und damit ausserhalb des Dreiecks ABC liegen. Weil P ein Punkt im Innern des Dreiecks ist, trennen sich die Punkte QR und $P\overline{Q}$. QR ist daher eine Strecke im Innern des Dreiecks ABC. Weil die Punkte QBR nicht auf einer Geraden liegen, und damit keine zwei davon Gegenpunkte sind, ist gezeigt, dass QBR ein sphärisch-elliptisches Dreieck darstellt.

Man kann nun auf dieses Dreieck das Axiom II, 6 anwenden. Die Gerade CP muss danach die Seite QB in einem Punkt S schneiden, da C ausserhalb der Seite BR liegt.

Hilfssatz 2: Jede Strecke ist eindeutig halbierbar.



Figur 8

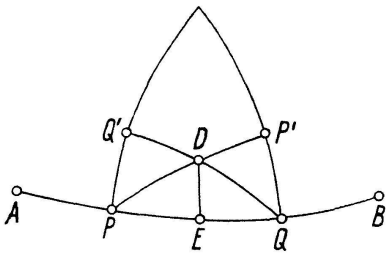
Beweis: 1. Fall: A und B sind keine Gegenpunkte (Figur 8). Die Senkrechten in A und B schneiden sich im Punkt S. Auf AS und BS werden gleiche Strecken AB' und BA' abgetragen und die Strecken AA' und BB' gezeichnet.

AA' und BB' schneiden sich in D im Innern des Dreiecks ABS (Anwendung von Axiom II, 6 auf $\triangle\, AA'S$ und weitere Anwendung von Axiom II, 5 wie beim Beweis von Satz VIII). Es gilt:

$$\triangle\, A\,B\,B' \cong \triangle\, B\,A\,A' \quad \text{nach Kongruenzsatz I}\,.$$

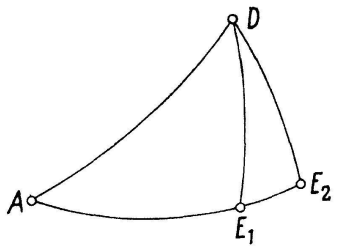
Daraus folgt: $\sphericalangle\, A'AB = \sphericalangle\, B'BA$. Daher ist $\triangle\, ABD$ gleichschenklig. Die Winkelhalbierende des Dreiecks ABD bei D halbiert AB in E.

2. Fall: A und B sind Gegenpunkte (Figur 9). Die Strecke AB ist in diesem Fall eine der durch die Punkte A und B gehenden Halbgeraden. (Siehe Definition 1 und Zusatz zu Definition 3.)



Figur 9

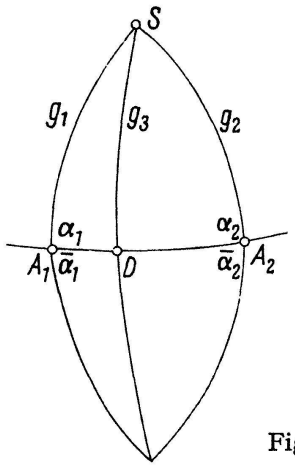
Man wählt innerhalb der Halbgeraden einen Punkt P. Dann sind AP und BP Strecken im Sinn unserer Definition. AP möge die kleinere dieser beiden Strecken von der Länge a sein. Wir können dann die Strecke AP von B aus bis Q abtragen, so dass (BQP) gilt. P und Q liegen beide innerhalb der Halbgeraden AB, trennen also A und B nicht und sind daher nach Axiom II, 5 keine Gegenpunkte. Auf die Punkte P und Q kann dieselbe Betrachtung wie im 1. Fall angewandt werden. Der Punkt E halbiert dann PQ und damit auch AB. Es ist nun noch zu zeigen, dass diese Halbierung von AB eindeutig und damit von der Wahl des Punktes P unabhängig ist.



Figur 10

Zum Beweis (Figur 10) nehmen wir an, die Halbgerade AB besitze zwei Mittelpunkte E_1 und E_2. D sei ein Punkt ausserhalb der Geraden AB. Ein solcher existiert nach Axiom I, 4 immer. Dann gelten in den Dreiecken $\triangle\, ADE_1$ und $\triangle\, ADE_2$ folgende Beziehungen: $AD = AD$, $\sphericalangle\, DAE_1 = \sphericalangle\, DAE_2$, $AE_1 = AE_2$
Nach Axiom III, 5 muss dann auch $\sphericalangle\, ADE_1 = \sphericalangle\, ADE_2$ sein. Da die Winkelantragung nach Axiom III, 4 eindeutig ist, folgt daraus, dass die Punkte E_1 und E_2 zusammenfallen müssen.

Hilfssatz 3: Alle durch zwei Gegenpunkte S und $\overline{S}$ bestimmten entarteten Strecken oder Halbgeraden sind zueinander kongruent. Kongruenz besteht auch zwischen den von zwei solchen Strecken bei S und $\overline{S}$ eingeschlossenen Winkeln.



Figur 11

2 verschiedene Gerade g_1 und g_2 durch S schneiden sich ein zweites Mal in $\overline{S}$ (Figur 11). A_1 und A_2 seien die Mitten der Strecken $S\overline{S}$ auf g_1 und g_2.

Wären A_1 und A_2 Gegenpunkte, so müssten die Punkte $A_1\, A_2\, S$ und $\overline{S}$ nach Satz 1a, auf einer Geraden liegen im Gegensatz zur Annahme, dass g_1 und g_2 verschiedene Geraden sind. A_1 und A_2 sind hier also keine Gegenpunkte.

Es gilt:

$$SA_1 = \overline{S}A_1\,; \qquad SA_2 = \overline{S}A_2\,.$$

Nach Kongruenzsatz III ergit sich dann

$$\triangle\, A_1\, A_2\, S \cong \triangle\, A_1\, A_2\, \overline{S}\,.$$

Daraus folgt:

$$\sphericalangle\, \alpha_1 = \sphericalangle\, \bar{\alpha}_1 = R\,; \qquad \sphericalangle\, \alpha_2 = \sphericalangle\, \bar{\alpha}_2 = R\,; \qquad \sphericalangle\, A_1\, S\, A_2 = \sphericalangle\, A_1\, \overline{S}\, A_2$$

und wegen der erwiesenen Gleichschenkligkeit der beiden Dreiecke

$$A_1S = A_2S = A_2\overline{S} = A_1\overline{S}\,.$$

Daher

$$A_1S + A_1\overline{S} = A_2S + A_2\overline{S}\,.$$

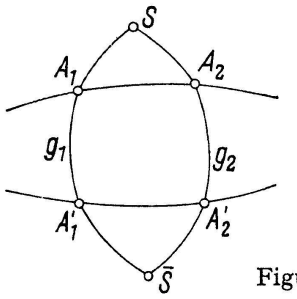
Analog kann man für eine beliebige 3. Gerade g_3 durch S und $\overline{S}$ zeigen, dass gilt

$$A_1S + A_1\overline{S} = DS + D\overline{S},$$

womit alles bewiesen ist.

Hilfssatz 4: Zwei verschiedene Geraden haben genau ein gemeinsames Lot.

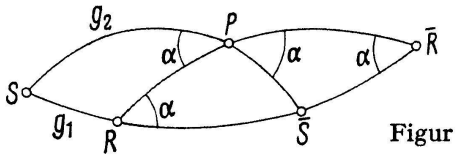
Die beiden Geraden g_1 und g_2 mögen sich in zwei Gegenpunkten S und $\overline{S}$ (Axiom I, 5) (Figur 12) schneiden. Die Verbindungsgerade ihrer Seitenmitten zwischen S und $\overline{S}$ (Beweis von Hilfssatz 3) ist ein gemeinsames Lot.



Figur 12

Wir nehmen an, die Strecke A_1A_2 sei dieses gemeinsame Mittellot. $A_1'A_2'$ sei ein zweites gemeinsames Lot der beiden Geraden zwischen S und $\overline{S}$. Das führt jedoch zu einem Widerspruch. Wegen der Kongruenz der Dreiecke $\Delta\, A_1'A_2'S$ und $\Delta\, A_1'A_2'\overline{S}$ muss das gemeinsame Lot $A_1'A_2'$ ebenfalls die beiden Halbgeraden zwischen S und $\overline{S}$ halbieren. Wegen der Eindeutigkeit der Halbierbarkeit müssen weiter die Punkte A_1 und A_1' und A_2 und A_2' zusammenfallen.

Hilfssatz 5: Alle durch irgend zwei Gegenpunkte begrenzte entartete Strecken sind gleich lang. Die gemeinsame Länge aller dieser entarteten Strecken sei $2\,e$.



Figur 13

S und $\overline{S}$ sind 2 Gegenpunkte (Figur 13). R ist ein beliebiger dritter Punkt. Die durch R und S bestimmte Gerade g_1 geht auch durch $\overline{S}$ (siehe Satz 1a). Es gibt noch wenigstens eine zweite von g_1 verschiedene Gerade g_2 durch die Punkte S und $\overline{S}$. Auf ihr wird P so gewählt, dass $P\overline{S} = SR$ ist.

Dann gilt: $\Delta\, SPR \cong \Delta\, \overline{S}RP$ nach Kongruenzsatz III, da $PR = PR$, $SR = \overline{S}P$, $SP = S\overline{S} - P\overline{S} = S\overline{S} - SR = R\overline{S}$. (Nach Hilfssatz 3 ist $S\overline{S}$ für alle Geraden durch S und $\overline{S}$ konstant.) Daraus folgt:

$$\sphericalangle\, S\,P\,R = \sphericalangle\, \overline{S}\,R\,P = \sphericalangle\, \alpha\,.$$

Da g_1 und g_2 zwei verschiedene Geraden sind, sind P und R keine Gegenpunkte. Wären P und R zwei Gegenpunkte, so müssten nämlich g_1 und g_2 miteinander identisch sein (Satz 1, 2. Teil). Die Punkte P und R bestimmen daher genau eine Gerade. Dieselbe schneidet g_1 zum 2. Mal im Gegenpunkt $\overline{R}$ von R. Es gilt weiter:

$$\sphericalangle\, \alpha = \sphericalangle\, P\,R\,\overline{S} = \sphericalangle\, S\,P\,R = \sphericalangle\, \overline{R}\,P\,\overline{S} = \sphericalangle\, P\,\overline{R}\,\overline{S} \quad \text{(Hilfssatz 3)}$$

$\overline{S}\overline{R}P$ ist also gleichschenklig. Daher ist:

$$S\,R = P\,\overline{S} = \overline{S}\,\overline{R}\,.$$

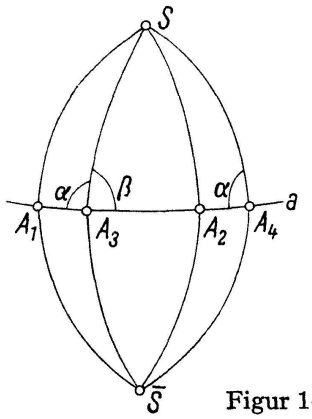
Daraus folgt:

$$S\overline{S} = R\overline{R} = 2e\,.$$

Damit ist alles bewiesen.

Hilfssatz 6: Die Senkrechten in den Punkten A_1, A_2... einer Geraden schneiden sich alle in zwei Gegenpunkten $S\overline{S}$, und es gilt dann:

$$A_1S = A_2S = \cdots\cdots = A_1\overline{S} = A_2\overline{S} = \cdots = e\,.$$



Figur 14

Beweis: Die Senkrechten in den Punkten A_1 und A_2 (keine Gegenpunkte) der Geraden a schneiden sich in den Gegenpunkten S und $\overline{S}$ (Figur 14). Aus der Kongruenz der gleichschenkligen Dreiecke

$$\triangle\, A_1\, A_2\, S \cong \triangle\, A_1\, A_2\, \overline{S} \qquad \text{(Kongruenzsatz II)}$$

folgt:

$$A_1S = A_2S = A_1\overline{S} = A_2\overline{S} = e\,.$$

A_3 sei ein weiterer Punkt auf a. Es wird gezeigt, dass die durch S und A_3 gehende Gerade auf a senkrecht steht. A_1A_3 wird von A_2 aus bis A_4 auf a abgetragen. Es ist also $A_1A_3 = A_2A_4$ und

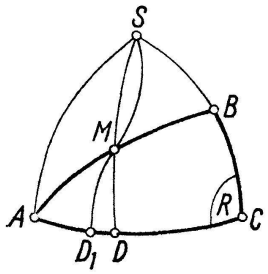
$$\triangle\, A_1\, A_3\, S \cong \triangle\, A_2\, A_4\, S \qquad \text{(Kongruenzsatz I)}$$

Daraus folgt:

$$\sphericalangle\, S\, A_3\, A_1 = \sphericalangle\, S\, A_4\, A_2 = \sphericalangle\, \alpha \qquad \text{und} \qquad SA_3 = SA_4\,.$$

Daher ist $\triangle\, A_3A_4S$ gleichschenklig, und wegen $\alpha + \beta = 2\,R$ ergibt sich $\alpha = \beta = R$. Die Senkrechte in A_3 zu a geht also durch S und $\overline{S}$.

Hilfssatz 7: In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten kleiner als e sind, wird die Hypotenuse halbiert. Vom Mittelpunkt dieser Hypotenuse lässt sich dann genau ein Lot auf jede der Katheten fällen, dessen Fusspunkt innerhalb der Katheten liegt.



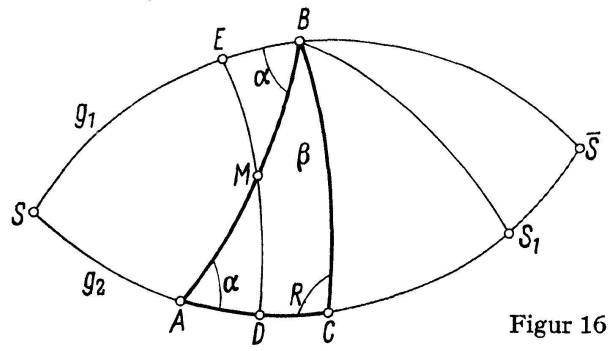
Figur 15

Die Senkrechten in A und C zu AC schneiden sich in S mit $SC = e$ (Figur 15). SM steht nach Hilfssatz 6 senkrecht zu AC. Da M innerhalb des Dreiecks ACS liegt, liegt

D zwischen A und C (Hilfssatz 1). Es sei angenommen, MD_1 sei ein zweites Lot von M auf AC. Dann muss MD_1 nach Hilfssatz 6 auch durch S hindurchgehen. Dann müssten aber M und S Gegenpunkte sein, was nicht möglich ist, da $MS < D_1S = e$ ist. Es gibt also nur ein Lot von M auf AC.

Satz 3. Die Winkelsumme im Dreieck ist immer grösser als $2\,R$.

Zunächst wird gezeigt, dass in einem Dreieck, das einen einzigen rechten Winkel hat und dessen Katheten kleiner als e sind, die Winkelsumme grösser als $2\,R$ ist (Figur 16).



Figur 16

Ist ABC ein solches Dreieck, so halbieren wir zum Beweis die Hypotenuse AB und erhalten den Mittelpunkt M. A und B sind hier wiederum keine Gegenpunkte, da sonst der Winkel bei C kein rechter sein könnte. Von M wird ein Lot auf AC gefällt mit dem Fusspunkt D. D muss zwischen A und C liegen (Hilfssatz 7). Auf der Geraden durch M und D wird von M aus MD bis E angetragen. Die Punkte E und B bestimmen eine Gerade g_1. Ihre Schnittpunkte mit der durch ADC festgelegten Geraden g_2 seien S und $\bar{S}$.

Nun gilt: $\triangle\, ADM \cong \triangle\, BEM$ nach Kongruenzsatz I. Daher

$$\sphericalangle\, B\,E\,M = \sphericalangle\, A\,D\,M = R, \quad \sphericalangle\, E\,B\,M = \sphericalangle\, D\,A\,M = \sphericalangle\, \alpha\,.$$

ED ist also gemeinsames Lot der beiden Geraden g_1 und g_2. Daraus folgt nach Hilfssatz 5:

$$D\,S = D\,\bar{S} = E\,S = E\,\bar{S} = e\,.$$

Nunmehr werde angenommen, die Winkelsumme im Dreieck ABC sei kleiner als $2\,R$, also $\alpha + \beta < R$.

An BC wird nun in B ein rechter Winkel angetragen. Dann ist

$$\sphericalangle\, S\,B\,S_1 = \alpha + \beta + R < 2\,R\,.$$

Der freie Schenkel des rechten Winkels in B liegt deshalb im Innern des Winkels $CB\bar{S}$, und es gilt $CS_1 < C\bar{S}$ (Hilfssatz 1). Wegen $C\bar{S} < D\bar{S} = e$ folgt $CS_1 < e$.

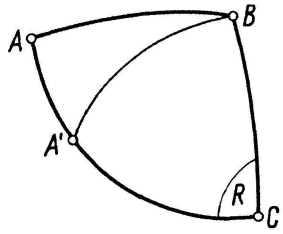
Aus Hilfssatz 6 folgt für das Dreieck CS_1B:

$$CS_1 = BS_1 = e\,.$$

Die beiden Aussagen $CS_1 < e$ und $CS_1 = e$ widersprechen sich. Die Winkelsumme im Dreieck ABC kann also nicht kleiner als $2\,R$ sein.

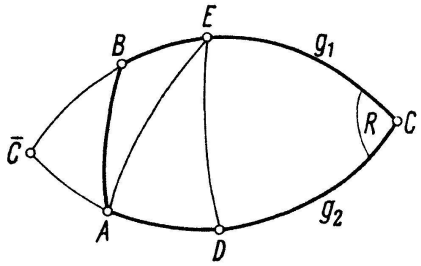
Nunmehr werde angenommen, dass die Winkelsumme im Dreieck $2\,R$ ist. Dann gilt: $\alpha + \beta = R$ und die Punkte S_1 und $\bar{S}$ fallen zusammen. Nun ist $D\bar{S} = e$ (Hilfssatz 6), und ebenso $C\bar{S} = e$ (Hilfssatz 6). Da jedoch $C\bar{S} < D\bar{S}$ ist, folgt $e < e$, also ebenfalls ein Widerspruch.

Damit ist der Satz für alle rechtwinkligen Dreiecke mit Katheten kleiner als e und einem rechten Winkel bewiesen. Ist eine Kathete, etwa AC, $= e$, so fallen die Punkte S und A zusammen und β ist ein rechter Winkel. $\triangle ABC$ hat demnach zwei rechte Winkel und seine Winkelsumme ist also grösser als $2\,R$.



Figur 17

Es sei nun ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck (Figur 17), in dem $e < AC < 2\,e$ gelte. Zwischen A und C gibt es dann einen Punkt A', so dass $A'C = e$ ist. Dann ist $A'B$ gleich e und weiter $\sphericalangle A'BC = R$. Da $A'B$ innerhalb des $\triangle ABC$ verläuft, ist $\sphericalangle ABC > R$ und damit die Winkelsumme jedenfalls wieder grösser als $2\,R$.



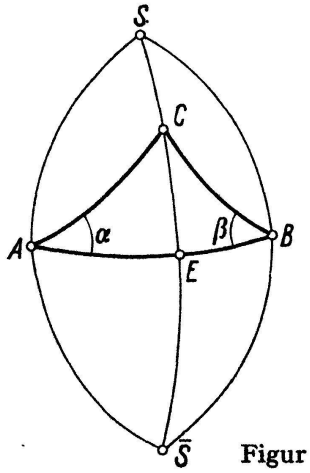
Figur 18

Nun nehmen wir an, die Katheten BC und AC seien grösser als e (Figur 18). Der Winkel bei C ist R. $\bar{C}$ sei der Gegenpunkt von C. DE sei das gemeinsame Lot der beiden durch BC und AC bestimmten Geraden g_1 und g_2. Es gilt also: $CE = ED = e$.

Dreieck DCE ist dreirechtwinklig. Wegen $\sphericalangle EDC = R$ und $ED = e$ folgt nach Hilfssatz 6 $\sphericalangle EAD = R$ und $EA = e$. Da AE innerhalb des Dreiecks ABC verläuft, muss $\sphericalangle BAC > R$ sein. Daher ist die Winkelsumme im Dreieck ABC grösser als $2\,R$.

Alle Dreiecke mit wenigstens einem rechten Winkel haben also eine Winkelsumme grösser als $2\,R$.

Nunmehr ist noch der Fall eines beliebigen Dreiecks zu behandeln. Sind hier wenigstens zwei Winkel grösser als R, so ist nichts zu beweisen. Es ist nur noch der Fall zu erledigen, dass etwa $\alpha < R$, $\beta < R$ und $\gamma < R$ oder $\alpha < R$, $\beta < R$ und $\gamma > R$ ist.

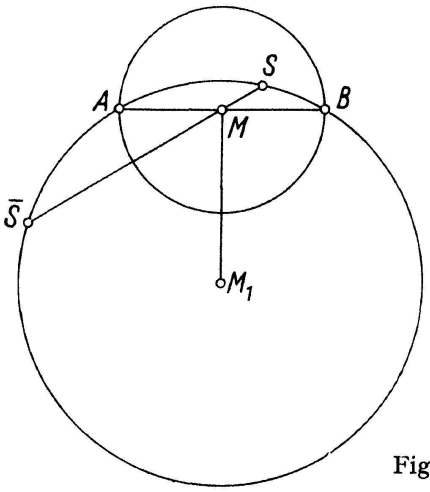


Figur 19

In A und B werden die Senkrechten errichtet, die sich in den Gegenpunkten S und $\bar{S}$ schneiden (Figur 19). Wegen der Voraussetzung $\alpha < R$, $\beta < R$ liegt Punkt C im Innern des Dreiecks ABS. Die durch S und C bestimmte Gerade hat nach Hilfssatz 1 mit AB den zwischen A und B liegenden Punkt E gemeinsam und steht senkrecht zu AB (Hilfssatz 6). Das Dreieck ABC ist demnach in die beiden rechtwinkligen Dreiecke AEC und BEC zerlegt, deren Winkelsumme grösser als $2\,R$ ist. Daraus folgt dann auch für das Dreieck ABC $\alpha + \beta + \gamma > 2\,R$, was zu beweisen war.

Die hier ohne Modell entwickelte sphärisch-elliptische Geometrie lässt sich, wie bereits erwähnt, an verschiedenen Modellen veranschaulichen. Als einfachstes Modell kommt die Geometrie auf der Kugeloberfläche in Frage. Sie erfüllt das hier aufgestellte Axiomensystem. Genau so lässt sich diese elliptische Geometrie aber auch im elliptischen Kreisbündel realisieren. Unter einem Bündelkreis versteht man dabei jeden Kreis und jede Gerade, die einen gegebenen sogenannten Fundamentalkreis diametral schneiden. Jeder Punkt der Ebene wird dann als sphärisch-elliptischer Punkt und jeder Diametralkreis als sphärisch-elliptische Gerade definiert. Dieses Modell erfüllt ebenfalls das aufgestellte Axiomensystem. Es sei hier kurz noch auf die Definition der Gegenpunkte bei diesem Modell hingewiesen.

Der Fundamentalkreis sei k (Figur 20). Ein Diametralkreis bezüglich des Durchmessers AB von k ist eine elliptische Gerade. Alle Sehnen durch M schneiden g in Gegenpunkten etwa S und $\bar{S}$. Jeder Kreis durch S und $\bar{S}$ schneidet k diametral, ist also eine elliptische Gerade. Durch S und $\bar{S}$ gehen also unendlich viele elliptische Geraden. Auf den weiteren Aufbau der elliptischen Geometrie in diesem Modell wurde hier verzichtet.



Figur 20

Die Gültigkeit der im 1. Teil formulierten Axiome lässt sich für das elliptische Kreisbündel ohne weiteres zeigen, erfordert aber, wenn dies unabhängig vom Kugelmodell erfolgt, immerhin einen bestimmten Aufwand an Überlegungen und Figuren, so dass aus räumlichen Gründen darauf verzichtet wird.

Der in dieser Abhandlung durchgeführte axiomatische Aufbau der sphärisch-elliptischen Geometrie wurde vorgenommen, weil in der Literatur eine axiomatische Entwicklung dieser Disziplin in der hier gegebenen Darstellung nicht gefunden werden konnte. Mit diesem Thema hat sich noch W. DIECK[1]) in der Schrift: «Nichteukli-

[1]) W. DIECK, *Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene* (Math. Physikalische Bibliothek 31, Teubner 1918).

dische Geometrie in der Kugelebene» befasst. Das von ihm benützte Axiomensystem weicht jedoch von dem in der vorliegenden Arbeit aufgestellten Axiomensystem in wesentlichen Punkten ab. Beim Aufbau der nichteuklidischen Geometrie in der Kugelebene selbst bedient sich DIECK verschiedentlich, wohl zur Abkürzung mancher Beweise, auch anschaulicher Vorstellungen aus der bekannten Kugelgeometrie. In der hier nun entwickelten Gestalt eignet sich die sphärisch-elliptische Geometrie durchaus für die Behandlung in speziellen Kursen (Arbeitsgemeinschaften) für mathematisch besonders interessierte Schüler der Oberstufe. Bei der Aufstellung des Axiomensystems wurde, wie bereits erwähnt, nicht darauf geachtet, unbedingt ein völlig unabhängiges System zu gewinnen, um den Aufbau der sphärisch-elliptischen Geometrie nicht zu kompliziert und unübersichtlich zu gestalten.

J. MALL, Weiden/BRD.

Kleine Mitteilung

Über eine Ungleichung von S. S. WAGNER

S. S. WAGNER kündigt in den Notices of the American Mathematical Society, vol. *12* (1965), p. 220 folgende Ungleichung an:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\Sigma a_i b_i + x \sum_{i \neq j} a_i b_j\right)^2 \leqq \left(\Sigma a_i^2 + 2x \sum_{i<j} a_i a_j\right)\left(\Sigma b_i^2 + 2x \sum_{i<j} b_i b_j\right)\\ &\qquad\qquad (a_i,\ b_i \ \text{reell},\quad 0 \leq x \leq 1)\,.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Für diese Ungleichung wird ein komplizierter Induktionsbeweis angedeutet, der anscheinend mehrere hundert einzelne Rechnungen erfordert. Doch lässt sich (1) auf folgende Weise ganz einfach beweisen:
Man forme die Ungleichung mittels der Identitäten

$$\sum_{i \neq j} a_i b_j = \Sigma a_i \Sigma b_i - \Sigma a_i b_i$$

$$2 \sum_{i<j} a_i a_j = (\Sigma a_i)^2 - \Sigma a_i^2$$

$$2 \sum_{i<j} b_i b_j = (\Sigma b_i)^2 - \Sigma b_i^2$$

um und setze dabei $1 - x = y$. Es gilt $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.
Man erhält

$$[x\, \Sigma a_i\, \Sigma b_i + y\, \Sigma a_i b_i]^2 \leqq [x(\Sigma a_i)^2 + y\, \Sigma a_i^2]\, [x(\Sigma b_i)^2 + y\, \Sigma b_i^2]\,. \tag{2}$$

Ausmultipliziert ergibt das

$$x y\, [(\Sigma a_i)^2\, \Sigma b_j^2 + (\Sigma b_i)^2\, \Sigma a_j^2 - 2\, \Sigma a_i\, \Sigma b_i\, \Sigma a_j b_j] + y^2\, [\Sigma a_i^2\, \Sigma b_i^2 - (\Sigma a_i b_i)^2] \geqq 0\,. \tag{3}$$

Der Koeffizient von xy ist $\sum_j (b_j\, \Sigma a_i - a_j\, \Sigma b_i)^2$ und daher nicht negativ; der Koeffizient von y^2 ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ebenfalls nicht negativ. Da $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, ist damit die Ungleichung von WAGNER bewiesen.

P. FLOR, Wien