Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 6

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 489. Jedem Punkt P einer Ellipse werden die drei von P verschiedenen Punkte P_1, P_2, P_3 zugeordnet, deren zugehörige Krümmungskreise durch P gehen. Krümmungszentrum für P_i sei K_i $(i = 1, 2, 3)$. Man zeige, dass die Flächeninhalte der Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ und $K_1 K_2 K_3$ konstant bleiben, wenn P die Ellipse durchläuft. (Für das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ ist diese Eigenschaft bekannt; siehe Enzyklopädie der Math. Wiss. III C 1, S. 75.)

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Zeichnet man in einem Ellipsenpunkt P $(a \cos\varphi; b \sin\varphi) = P(\varphi)$ den Krümmungskreis, so schneidet dieser die Ellipse (von den Scheiteln abgesehen) in einem von P verschiedenen Punkt Q und die Krümmungssehne PQ, die Tangente t in P und die Hauptachse bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis auf der Hauptachse. Daraus ergibt sich für die Krümmungssehne PQ die Gleichung

$$b\,x \cos\varphi - a\,y \sin\varphi = a\,b \cos 2\varphi\,. \tag{1}$$

Für Q $(a \cos u; b \sin u)$ folgt dann $\cos(u + \varphi) = \cos 2\varphi$ und damit $u = -3\varphi$. Man kann also sagen, dass die Krümmungssehnen von $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi - 120°)$, $P_3(\varphi + 120°)$ durch Q (-3φ) gehen. Das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ ist die Projektion eines regelmässigen Dreiecks im Hauptkreis und somit ist seine Fläche Δ_1 konstant, nämlich

$$\Delta_1 = \frac{3\,a\,b}{4} \sqrt{3}\,. \tag{2}$$

Der Krümmungsmittelpunkt K, der dem Ellipsenpunkt P zugeordnet ist, hat die Koordinaten

$$x_K = \frac{e^2}{a} \cos^3 t = \frac{e^2}{4\,a} (\cos 3\,t + 3 \cos t) \quad \text{und} \quad y_K = -\frac{e^2}{4\,b} (3 \sin t - \sin 3\,t)\,.$$

Bildet man die Werte für $t = \varphi$, $t = \varphi - 120°$ und $t = \varphi + 120°$, so erhält man ohne grössere Rechnung für die Fläche Δ_2 des Dreiecks $K_1 K_2 K_3$

$$\Delta_2 = \frac{3^3}{4^3} \cdot \frac{e^4}{a\,b} \sqrt{3}\,. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt $\Delta_1 \Delta_2 = 3 \cdot 0{,}75^4\, e^4$, also für alle konfokalen Ellipsen derselbe Wert. Dreieck $P_1 P_2 P_3$ ist übrigens das grösste einbeschriebene Dreieck.

Für den Krümmungskreishalbmesser ϱ gilt allgemein

$$(a\,b\,\varrho)^{2/3} = b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t\,.$$

Setzt man nun für t die obigen drei Werte ein und addiert, so erhält man für die Punkte P_i $(i = 1, 2, 3)$

$$\sum \varrho_i^{2/3} = 1{,}5\,(a^2 + b^2)\,(a\,b)^{-2/3} = \text{const.}$$

Auf weitere interessante Eigenschaften dieser Punkte-Konfiguration hat schon STEINER hingewiesen (vgl. Werke II, S. 377).

K. SCHULER, Rottweil

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin), O. REUTTER (Ochsenhausen), A. WAHL (Stuttgart), K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 490. Ist p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die Folge aller Primzahlen, dann gilt für alle reellen $x > 1$ die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} < \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\,.$$

O. REUTTER, Ochsenhausen

1. Lösung: Ist p_n die n-te Primzahl und $\exp u = e^u$, so gilt für $x > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-x})^{-1} = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - p_n^{-x})\right\}$$

$$= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (p_n^{-x} + 2^{-1} p_n^{-2x} + \cdots)\right\} > \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-x}\right\}.$$

Da die Funktion $x^{-1} e^x$ für $x > 0$ bei $x = 1$ ein Minimum hat und dort den Wert e annimmt, ist

$$\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-x}\right\} \geqq e \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-x}$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} > e \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-x}.$$

H. Meili, Winterthur

2. Lösung: Bekanntlich ist $\log u \leqslant u - 1$ für $u > 0$, also

$$\log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} \leqslant -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x}$$

$$< -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right) = \log\frac{1}{e} + \log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} < \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

J. H. van Lint, Eindhoven

Der Aufgabensteller beweist und benutzt die allgemeine Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{r} x_n \cdot \prod_{n=1}^{r} (1 - x_n) \leqq r^{r+1}/(r+1)^{r+1} < 1/e, \quad 0 < x_n < 1.$$

Weitere Lösungen sandten L. Carlitz (Durham/USA), H. Harborth (Braunschweig), E. Teuffel (Stuttgart), K. Zacharias (Berlin).

Aufgabe 491. $\mathfrak{C}$ sei eine kubische Parabel ($y = a x^3 + b x^2 + c x + d$) und $\mathfrak{M}\ \{g, g', \ldots\}$ die Menge der Geraden, die $\mathfrak{C}$ in drei (reellen) Punkten schneiden. Man begründe folgende *ein*eindeutige Abbildung $g \leftrightarrow g'$ von $\mathfrak{M}$ auf sich: In den Schnittpunkten von g mit $\mathfrak{C}$ werden die Tangenten an $\mathfrak{C}$ gelegt. Diese Tangenten schneiden $\mathfrak{C}$ in Punkten von g'. ($g \rightarrow g'$ gilt für *jede* Kurve 3. Ordnung. (Vgl. B. L. van der Waerden, Algebraische Geometrie, S. 89)). Zeige ferner:

$$g_1 \| g_2 \Rightarrow g_1' \| g_2'. \tag{1}$$

$$\mathrm{DV}(g_1 g_2 g_3 g_4) = \mathrm{DV}(g_1' g_2' g_3' g_4'), \quad \mathrm{DV} = \text{Doppelverhältnis}. \tag{2}$$

W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

Lösung: Die Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf sich lässt sich erweitern auf die Abbildung der Menge aller Geraden der Ebene auf sich. Eine beliebige nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörende reelle Gerade g der Ebene schneidet $\mathfrak{C}$ in zwei konjugiert imaginären Punkten (nebst einem reellen), deren «Tangentialpunkte» ebenfalls konjugiert imaginär sind und deshalb eine reelle Verbindungsgerade g' haben. g' ist die sogenannte «Begleiterin» von g (Cayley: «satellite line»). Die inverse Zuordnung $g' \rightarrow g$ ist nur für diejenigen Kurven 3. Ordnung eindeutig, die auch von 3. Klasse sind, also eine Spitze haben (im vorliegenden Fall ist diese der unendlich ferne Punkt der Kurve). Denn für solche Kurven gibt es aus jedem Kurvenpunkt P nur eine nicht in P berührende Tangente.

Für die rechnerische Behandlung im vorliegenden Fall beziehen wir die $\mathfrak{C}$ auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Wendepunkt liegt, während die eine Achse die Wendetangente ist und die andere nach der Spitze gerichtet ist. Die Gleichung der $\mathfrak{C}$ wird dann, wenn der Einheitspunkt $(1|1)$ auf der Kurve angenommen wird, $y = x^3$. Für den Tangentialpunkt P' eines Kurvenpunktes $P(x|y)$ erhält man $x' = -2x$ und $y' = -8y$. Die Zuordnung der Kurvenpunkte $P \rightarrow P'$ lässt sich also in eine affine Transformation der Ebene einordnen, welche die $\mathfrak{C}$ in sich überführt. Daraus folgen sofort $g \rightarrow g'$, $g' \rightarrow g$ sowie (1) und (2).

Für eine allgemeine Kubik mit Spitze (die ja projektiv äquivalent ist mit $\mathfrak{C}$) ist die Abbildung $g \to g'$ in einer ebenen Projektivität enthalten, deren Doppelpunkte der Wendepunkt, die Spitze und der Schnittpunkt der Wendetangente mit der Spitzentangente sind.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Weiter Lösungen sandten O. REUTTER (Ochsenhausen) und K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 492. Es seien a, b, c, d natürliche Zahlen und $\varphi(a)$ die Eulersche Funktion. Man beweise unter der Voraussetzung $(b, c) = 1$ die Kongruenz

$$\sum_{d|a} \varphi\left(\frac{a}{d}\right) \binom{b\,d-1}{c\,d-1} \equiv 0 \pmod{a\,c}.$$

E. TROST, Zürich

Solution: Put

$$S(a,b,c) = \sum_{d|a} \varphi\left(\frac{a}{d}\right) \binom{b\,d-1}{c\,d-1},$$

$$T(a,b,c) = \frac{b}{c}\, S(a,b,c) = \sum_{d|a} \varphi\left(\frac{a}{d}\right) \binom{b\,d}{c\,d}.$$

Then, since $\varphi(m) = \sum_{rs=m} r\,\mu(s)$ (μ = Möbius function),

$$S(a,b,c) = \sum_{dm=a} \varphi(m) \binom{b\,d-1}{c\,d-1} = \sum_{drs=a} r\,\mu(s) \binom{b\,d-1}{c\,d-1} = \sum_{rm=a} r\, S_1(m,b,c),$$

where

$$S_1(m,b,c) = \sum_{ds=m} \mu(s) \binom{b\,d-1}{c\,d-1}.$$

Similarly

$$T(a,b,c) = \sum_{rm=a} r\, T_1(m,b,c),$$

where

$$T_1(m,b,c) = \sum_{ds=m} \mu(s) \binom{b\,d}{c\,d}.$$

Now for p prime and $e \geqslant 1$ we have

$$\binom{b\,p^e}{c\,p^e} = \prod_{j=0}^{c p^e - 1} \frac{b\,p^e - j}{c\,p^e - j} = \binom{b\,p^{e-1}}{c\,p^{e-1}} \prod_{\substack{j=0 \\ p \nmid j}}^{c p^e - 1} \frac{b\,p^e - j}{c\,p^e - j} \equiv \binom{b\,p^{e-1}}{c\,p^{e-1}} \pmod{p^e}.$$

Similarly

$$\binom{b\,p^e - 1}{c\,p^e - 1} \equiv \binom{b\,p^{e-1} - 1}{c\,p^{e-1} - 1} \pmod{p^e}.$$

Therefore if $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r}$ and $s \mid p_2\, p_3 \ldots p_r$ we have

$$S_1(m,b,c) = \sum_s \left\{\mu(s)\binom{b\,m\,s^{-1}-1}{c\,m\,s^{-1}-1} + \mu(p_1\,s)\binom{b\,m\,p_1^{-1}\,s^{-1}-1}{c\,m\,p_1^{-1}\,s^{-1}-1}\right\} \equiv 0 \pmod{p_1^{e_1}}.$$

It follows that

$$S_1(m,b,c) \equiv 0 \pmod{m}, \qquad T_1(m,b,c) \equiv 0 \pmod{m}$$

and therefore

$$S(a,b,c) \equiv 0 \pmod{a}, \qquad T(a,b,c) \equiv 0 \pmod{a}. \tag{1}$$

From the last congruence we get

$$b\,S(a,b,c) \equiv 0 \pmod{a\,c}. \tag{2}$$

Put $a = a_1\, a_2$, where

$$a_1 = \prod_{\substack{p|a \\ p|c}} p^t, \qquad a_2 = \prod_{\substack{p|a \\ p \nmid c}} p^t.$$

Then, since $(b, c) = 1$, (2) implies $S(a, b, c) \equiv 0 \pmod{a_1 c}$, while (1) gives $S(a, b, c) \equiv 0 \pmod{a_2}$. Since $(a_1 c, a_2) = 1$ we have $S(a, b, c) \equiv 0 \pmod{a c}$.

L. CARLITZ, Duke University, Durham/USA

Unter der Voraussetzung $(b, c) = 1$ ist $T(a, b, c)\,(a b)^{-1}$ die Anzahl der «verschiedenen» Halsketten, die aus $a c$ weissen und $a b - a c$ schwarzen Kugeln gebildet werden können (vgl. J. RIORDAN, Combinatorial Analysis, p. 162). $T(a, b, c)$ ist also durch $a b$ und $S(a, b, c)$ durch $b c$ teilbar.

Eine weitere Lösung sandte W. JÄNICHEN (Berlin).

Neue Aufgaben

Aufgabe 513. If

$$N = \frac{x^2 - 6 x y + y^2}{x^2 - 10 x y + y^2},$$

where x, y are integers not both zero, N a positive integer, then N is representable in the forms

$$s^2 + (s + 1)^2 \quad \text{and} \quad 2 r^2 + (r \pm 1)^2 .$$

M. N. KHATRI, Bhilupur/India, A. MAKOWSKI, Warszawa/Poland

Aufgabe 514. Gegeben sei ein Kreis k und auf k ein Punkt S. Man ermittle jene kubische Parabel p, vom Typus $a^2 y = x^3$, von der S ein Scheitel und k der zugehörige Schmiegkreis ist.

R. BEREIS, Dresden

Aufgabe 515. Es sei $\mathfrak{C}$ ein «einfacher» Kurvenbogen (die Tangente ist in jedem Punkt von $\mathfrak{C}$ eindeutig und variiert kontinuierlich und monoton). Das von einer beweglichen Sehne s abgeschnittene Segment habe die Fläche S und T sei die Fläche des von s und den Tangenten in den Endpunkten von s gebildeten Dreiecks. Man zeige, dass die Parabelbogen die einzigen $\mathfrak{C}$ sind, für die S/T einen konstanten Wert hat.

E. W. STEIN, Graz

Aufgabe 516. Es sei r der Inkreisradius, $2 s$ der Umfang und R der Umkreisradius eines reellen ebenen Dreiecks, also

$$2 r \leqq \frac{2 s}{3 \sqrt{3}} \leqq R . \tag{1}$$

Man zeige, dass zwischen $2 r$ und R beliebig viele in s quadratische Terme in folgender Weise eingeschoben werden können:

$$2 r \leqq \frac{4 s^2 R^{-1} - 2 t r}{27 - t} \leqq \frac{4 s^2 R^{-1} - 2 T r}{27 - T} \leqq R \quad (-\infty < t \leqq T \leqq 11) . \tag{2}$$

I. PAASCHE, München

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Die gleichseitige Hyperbel, die durch die Ecken des achsenparallelen Tangentenrechtecks einer Ellipse geht, enthält auch deren Brennpunkte.

2. Gehen die Hauptdiagonalen eines Sehnensechsecks $abcdef$ durch denselben Punkt, so gilt $ace = bdf$.

3. T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sind die Berührungspunkte des Inkreises und der Ankreise des Dreiecks ABC auf der Seite BC. Es gilt

$$\Sigma \overline{AT}_i^2 = 3\,(b^2 + c^2) - a^2\,.$$

▶ Die Dreiecke ABC, AT_1T_2, AT_3T_4 besitzen dieselbe Mittellinie m_a. Drücke m_a^2 auf drei Arten aus.

4. Konstruiere die gemeinsamen Tangenten an zwei Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt.

▶ Der Fusspunkt des Lotes vom gemeinsamen Brennpunkt auf die gemeinsame Tangente ist der Schnittpunkt der Hauptkreise.
Beispiel: Ellipse: Zentrum $Z(0; 0)$, Brennpunkt $F(6; 0)$, Scheitelpunkt $A(7; 0)$. Parabel: $F(6; 0)$, Scheitelpunkt $S(4; 2)$.

5. Die Tangenten in den Punkten P_i $(i = 1, 2, 3)$ einer Parabel dritter Ordnung schneiden die Kurve in den Punkten Q_i. Die Fläche des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ ist das 16-fache der Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$. O. Reutter, Ochsenhausen

▶ Da jede kubische Parabel durch zwei Affinitäten aus $y = x^3$ erzeugt werden kann, genügt es, den Satz für diese Kurve zu beweisen. Man findet $P_i\,(u_i;\, u_i^3)$, $Q_i\,(-2\,u_i;\, -8\,u_i^3)$.

$$\Delta Q_i = \frac{1}{2}\,|-2\,u_i;\, -8\,u_i^3;\, 1| = \frac{1}{2}\,(-2)\,(-8)\,|u_i;\, u_i^3;\, 1| = 16\,\Delta P_i\,.$$

Bericht

Abschiedsvorlesung von Herrn Prof. Dr. Heinz Hopf

Am Nachmittag des 6. Juli 1965 fand an der ETH die Abschiedsvorlesung von Herrn Prof. Heinz Hopf statt. Um seine bedeutende Lehr- und Forschertätigkeit zu würdigen, war der Tag zu einem Symposium ausgestaltet worden, indem am Vormittag zwei prominente Topologen Vorträge hielten.

Prof. F. Hirzebruch, Bonn, beleuchtete in meisterhafter Form verschiedene topologische Probleme, die bekannten Sätzen der Zahlentheorie äquivalent sind. Prof. J. Milnor, Princeton, gab eine Übersicht über die 4 Arten von Mannigfaltigkeiten, die er als Objekte von Kategorien darstellte und beschrieb die zugehörigen Isomorphismen.

Prof. Hopf selbst schilderte in seiner sympathischen Art die Entwicklung der Topologie, wie er sie miterlebt, und man darf ruhig hinzufügen, mitgestaltet hat. Sein erstes Zusammentreffen mit der Topologie erfolgte 1917 in den Vorlesungen von E. Schmidt in Breslau. Damals wurde der Reinheit der Methode zuliebe in der Topologie nur der Stetigkeitsbegriff verwendet. Eine zweite wichtige Phase war das Zusammenarbeiten mit P. Alexandroff 1925–26 in Göttingen. Dessen Arbeiten waren ausgesprochen mengentheoretisch. Alexandroff riet aber seinem Freund, mehr Algebra zu verwenden. Hopf interessierte sich in der Folge immer mehr für die algebraischen Eigenschaften, die mit einem geometrischen Gebilde topologisch invariant verbunden sind. Diese Haltung wurde in der dritten Periode der Entwicklung noch verstärkt, als er zusammen mit P. Alexandroff – damals als einzige Ausländer – an der Universität in Princeton weilte, wo er mit Veblen, Lefschetz und Alexander zusammentraf. In seiner Arbeit «*Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*» (1930) verwendete Hopf den Begriff der Produktmannigfaltigkeit von Lefschetz als wesentliches Hilfsmittel.

Ein besonders wichtiges Jahr für die Entwicklung der Topologie war das Jahr 1935. Damals fand in Moskau das erste internationale Symposium über Topologie statt. Dort begründeten Alexander und Kolmogoroff unabhängig voneinander die Cohomologie-