

# Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $n = 2m$ im Ring gewisser ganzzahliger Matrizen

Autor(en): **Domiaty, R.Z.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **21 (1966)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-24643>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $n = 2^m$ im Ring gewisser ganzzahliger Matrizen

## I. Problemstellung und Ergebnis

Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis, dass die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \quad n > 2, \text{ ganzzahlig} \quad (1)$$

in gewissen Ringen mit nur abzählbar vielen Elementen für bestimmte  $n$  nichttriviale Lösungstriplett besitzt.

Dabei heiße ein Triplett von Elementen  $\alpha, \beta, \gamma$  aus einem beliebigen Ring  $R$  mit dem Nullelement  $0$  ein *nichttriviales Lösungstriplett* von (1), wenn

$$\alpha^n \neq 0, \quad \beta^n \neq 0, \quad \gamma^n \neq 0 \quad \text{und} \quad \alpha^n + \beta^n = \gamma^n$$

ist. Existiert ein solches Triplett, so heiße (1) *nichttrivial lösbar*. A. AIGNER hat in mehreren Arbeiten [1]–[5]<sup>1)</sup> die Möglichkeit der Gleichung (1) für gewisse  $n$  in quadratischen Körpern untersucht. Weiter ist bekannt, dass (1) im Ring der ganzzahligen Matrizen der Ordnung 2 für  $n = 4$  nichttrivial lösbar ist; vgl. [6]. Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern. Es gilt nämlich der folgende

**Satz.** *Die Gleichung (1) ist für  $n = 2^m$  im Ring der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung  $2^{m-1}$  nichttrivial lösbar.*

Der Beweis folgt im Abschnitt III der Arbeit. Er wird sich auf die folgenden Hilfssätze stützen.

## II. Hilfssätze

**Hilfssatz 1.** *Es sei  $R$  ein Ring mit Einselement  $1$ .  $\alpha$  und  $\beta$  seien Elemente aus  $R$  mit  $\alpha\beta = \beta\alpha$ . Dann gilt für jedes geradzahlige  $n \geq 2$*

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}^n = (\alpha\beta)^{n/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und für jedes ungeradzahlige  $n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}^n = (\alpha\beta)^{(n-1)/2} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Beweis ergibt sich durch vollständige Induktion.

**Hilfssatz 2.** *Ist (1) in einem Ring  $R$  mit Einselement für  $n = s$  nichttrivial lösbar, so ist (1) auch für  $n = 2s$  nichttrivial lösbar, und zwar im Ring  $R_2$  der quadratischen Matrizen der Ordnung 2 über  $R$ .*

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 7.

*Beweis.* Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit Elementen aus  $R$  gilt wegen Hilfssatz 1

$$A^{2s} = \alpha^s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{2s} = \beta^s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{2s} = \gamma^s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Es sei  $\alpha, \beta, \gamma$  ein nichttriviales Lösungstriplet von (1) für  $n = s$ . Dann ist

$$A^{2s} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{2s} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{2s} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

und

$$A^{2s} + B^{2s} = (\alpha^s + \beta^s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma^s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C^{2s}. \quad (5)$$

Dies war zu zeigen.

Trivialerweise gilt weiter der

**Hilfssatz 3.** *Ist  $R$  ein abzählbarer Ring mit Einselement, so trifft dasselbe auch für  $R_2$  zu.*

Hilfssatz 2 und 3 besagen zusammen: Ist (1) in einem abzählbaren Ring  $R$  mit Einselement für ein  $n = s$  nichttrivial lösbar, so gilt dies auch für  $n = 2s$  in einem weiteren abzählbaren Ring mit Einselement, nämlich im Ring  $R_2$ .

**Hilfssatz 4.** (a) *Im Ring  $G$  der ganzen Zahlen ist (1) für  $n = 2$  nichttrivial lösbar.*  
 (b) *Es sei  $H = G_p$  der Ring der ganzzahligen quadratischen  $p$ -reihigen Matrizen und  $H_q$  der Ring der  $q$ -reihigen Matrizen über  $H$ . Dann ist  $H_q$  isomorph dem Ring  $G_{pq}$  der  $pq$ -reihigen Matrizen über  $G$ .*

*Beweis.* (a) ist trivial. Wir beweisen (b). Jedes Element von  $H_q$  lässt sich in der Form einer zusammengesetzten quadratischen Matrix der Ordnung  $pq$  über  $G$  schreiben. Dabei unterteilt man die Matrix der Ordnung  $pq$  in  $q^2$  Quadrate mit je  $p^2$  Elementen und ordnet jeder solchen quadratischen Untermatrix ein Element aus  $G_p$  zu. Ordnet man nun jeder Matrix aus  $G_{pq}$  die nach dem obigen Muster abgeteilte Matrix zu, so ist die Zuordnung eineindeutig und, wie man durch direkte Ausrechnung findet, ein Isomorphismus zwischen  $G_{pq}$  und  $H_q$ .

### III. Beweis des Satzes in Abschnitt I

Nach Hilfssatz 4 (a) ist (1) in  $G$  für  $n = 2$  nichttrivial lösbar. Aus Hilfssatz 2 folgt damit, dass (1) im Ring  $G_2$  der zweireihigen quadratischen Matrizen über  $G$  für  $n = 2^2$  nichttrivial lösbar ist. Wir machen nun die Induktionsannahme, dass (1) für  $n = 2^m$  im Ring  $\Delta = G_{2^{m-1}}$  der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung  $2^{m-1}$  nichttrivial lösbar sei. Nach Hilfssatz 2 ist (1) dann für  $n = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$  im Ring  $\Delta_2$  der zweireihigen quadratischen Matrizen über  $\Delta$  nichttrivial lösbar. Nun ist aber  $\Delta_2$  gemäss Hilfssatz 4 (b) isomorph dem Ring  $G_{2^m}$  der  $2^m$ -reihigen quadratischen Matrizen über  $G$ . Also ist (1) auch für  $n = 2^{m+1}$  nichttrivial lösbar, und zwar im Ring  $G_{2^m}$ . Der Satz ist damit bewiesen.

## IV. Beispiel

Nach [6] ist im Ring  $G_2$  der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 2

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} 0 & 2rt \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^* = \begin{pmatrix} 0 & r^2 - t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^* = \begin{pmatrix} 0 & r^2 + t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit ganzzahligem  $r$  und  $t$  ein nichttriviales Lösungstriple für den Exponenten  $n = 4$ . Nach den obigen Überlegungen ist dann

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2rt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r^2 - t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r^2 + t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ein nichttriviales Lösungstriple von (1) für  $n = 2^3 = 8$  im Ring  $G_4$  der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 4. Das kann man übrigens auch direkt durch Nachrechnung verifizieren.

R. Z. DOMIATY, Graz

## LITERATUR

- [1] A. AIGNER, *Über die Möglichkeit von  $x^4 + y^4 = z^4$  in quadratischen Körpern*. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 43, Heft 9/12, S. 226–229 (1934).
- [2] A. AIGNER, *Weitere Ergebnisse über  $x^3 + y^3 = z^3$  in quadratischen Körpern*. Monatsh. f. Math. 56, 3. Heft, S. 240–252 (1952).
- [3] A. AIGNER, *Ein zweiter Fall der Unmöglichkeit von  $x^3 + y^3 = z^3$  in quadratischen Körpern mit durch 3 teilbarer Klassenzahl*. Monatsh. f. Math. 56, 4. Heft, S. 335–338 (1952).
- [4] A. AIGNER, *Die kubische Fermatgleichung in quadratischen Körpern*. J. f. reine u. angew. Math. 195, Heft 1/2, S. 3–17 (1956).
- [5] A. AIGNER, *Die Unmöglichkeit von  $x^6 + y^6 = z^6$  und  $x^9 + y^9 = z^9$  in quadratischen Körpern*. Monatsh. f. Math. 61, Heft 2, S. 147–150 (1957).
- [6] R. Z. DOMIATY, *Solutions of  $x^4 + y^4 = z^4$  in  $2 \times 2$  Integral Matrices* (Erscheint im American Mathematical Monthly).

## Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement

F. LAURENTI hat in zwei Untersuchungen [2]<sup>1)</sup>, [3] gezeigt, dass die Achsen von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement eine *Steiner-Zykloide* einhüllen. W. KICKINGER [1] hat dem analytischen Beweis von LAURENTI einen synthetischen gegenübergestellt und ausserdem noch nachgewiesen, dass sich die Brennpunkte von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement auf Kreisen bewegen. In der vorliegenden Untersuchung sollen die gleichen Fragen für allgemeine Kegelschnitte  $g$  (*Ellipsen und Hyperbeln*) diskutiert werden.

Es sei  $K$  der Krümmungsmittelpunkt eines beliebigen Punktes  $P$  des Kegelschnitts  $g$  und  $t$  die Kurventangente in  $P$ . Wir wählen ein kartesisches Bezugskreuz so, dass  $t$  mit der  $x$ -Achse und  $P$  mit  $O$  zusammenfallen, wodurch  $K$  im Abstand  $R$  von  $O$

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 10.