

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 21 (1966)
Heft: 2

Artikel: Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement und Erzeugung von Steinerzykloiden
Autor: Hoschek, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-24647>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 12.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

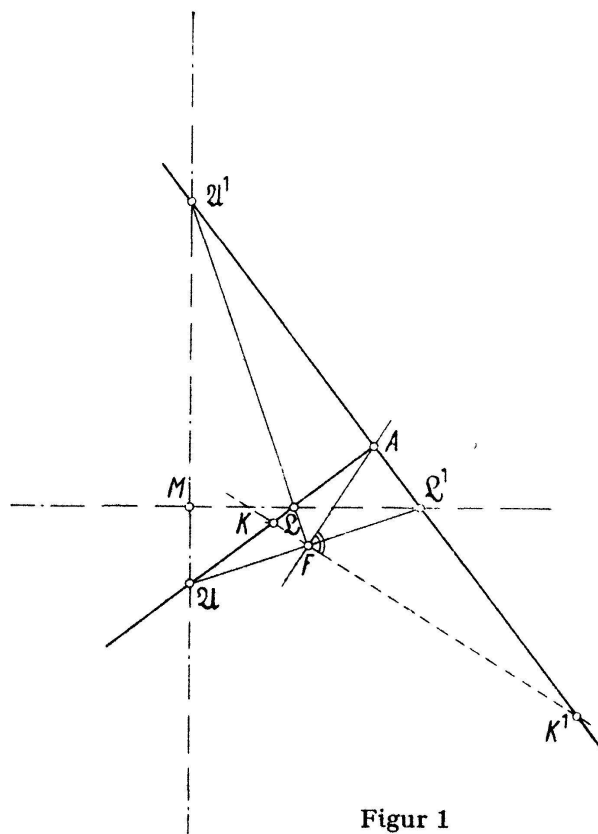
- [5] MICHAEL GOLDBERG, *Rotors in Polygons and Polyhedra*, Mathematics of Computation 14, 229–239 (1960).
 [6] ERNST MEISSNER, *Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik*, Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft, Zürich 54, 309–329 (1909).

Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement und Erzeugung von Steinerzykloiden

F. LAURENTI [3] [4] hat in zwei Untersuchungen gezeigt, dass die Achsen von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement Steinerzykloiden als Hüllkurven besitzen. Dem analytischen Beweis von LAURENTI hat W. KICKINGER [2] eine synthetische Beweisführung gegenübergestellt, weiter lässt sich nachweisen [1], dass Ellipsen und Hyperbeln von konstantem Achsenverhältnis mit gemeinsamem Krümmungselement Steinerzykloiden als Hüllkurven ihrer Achsen besitzen. Diese letzte Aussage soll in der vorliegenden Untersuchung mit synthetischen Methoden bewiesen werden.

F. STEINER ([5], S. 205) hat folgende Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes bei Kegelschnitten angegeben:

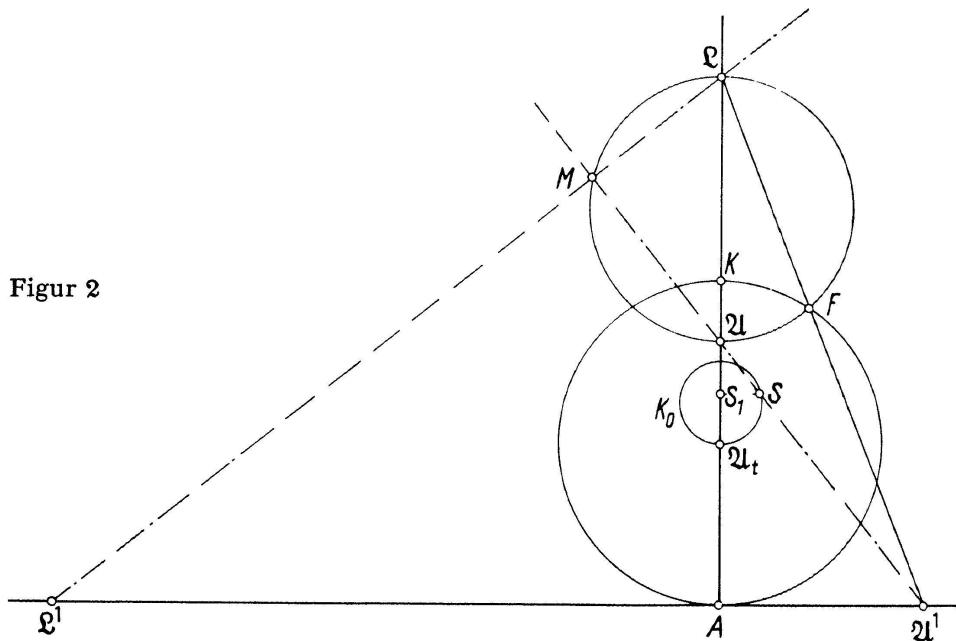
Treffen Tangente und Normale eines Punktes A eines Kegelschnitts die eine Achse desselben in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^1$, die andere in $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^1$, errichtet man in dem Schnittpunkt $(\mathfrak{A} \mathfrak{Q}^1, \mathfrak{A}^1 \mathfrak{Q}) = F$ auf der Geraden AF die Senkrechte, so trifft dieselbe die Normale des Kegelschnitts in dem Krümmungsmittelpunkt.



Figur 1

Liegen Ellipsen vor, so ist K das Krümmungszentrum, werden Hyperbeln betrachtet, ist K^1 das Krümmungszentrum (siehe Figur 1). Die Achsen des Kegelschnitts werden dabei im Verhältnis $AQ/AU = b^2/a^2 = \lambda^2 = \text{const.}$ geschnitten. Die Geraden U^1M , Q^1F , AQ sind Höhen des Dreiecks $Q^1Q U^1$; der Mittelpunkt M des Kegelschnitts und der Punkt F liegen daher auf dem Thaleskreis über AQ , der Punkt F bei Ellipsen ausserdem auf dem Thaleskreis über KA bzw. bei Hyperbeln auf dem Thaleskreis über K^1A , also im Schnitt der Kreise über AQ und AK bzw. AK^1 .

Durch Umkehr dieser Konstruktionsvorschrift von STEINER lässt sich eine Vorschrift $\mathfrak{B}$ gewinnen, welche die Achsen von Kegelschnitten von konstantem Achsenverhältnis λ^2 mit gemeinsamem Krümmungselement liefert. Wir beschränken uns zunächst auf Ellipsen (s. Figur 2):



Figur 2

Für alle Scharkurven ist der Kreis KA fest, sein Durchmesser gleich dem Radius R des Krümmungselementes. Wegen $b^2/a^2 = AQ/AU = \lambda^2$ kann AU nur im Bereich $AK/\lambda^2 \leq AU \leq AK$ liegen, während gleichzeitig für AQ gilt $AK \leq AQ \leq \lambda^2 AK$. Wählt man innerhalb dieser Bereiche einen Punkt U , so kann mit $\lambda^2 AQ = AU$ sofort bestimmt werden. Wird nun der Kreis über AQ gezeichnet, so erhält man als Schnittpunkt mit dem festen Kreis über AK den Punkt F . Man ziehe jetzt die Gerade UF , ihr Schnittpunkt mit der Tangente t des Krümmungselementes sei U^1 ; der Schnitt der Geraden U^1U mit dem Kreis über AQ sei M . Die Geraden MQ und MU sind dann die gesuchten Achsen der Scharellipse, M ihr Mittelpunkt.

Nun muss noch gezeigt werden, dass die Geraden MQ bzw. MU Steinerzykloiden einhüllen. Hat der Punkt U seine tiefste Lage U_t ($U_tU = R/\lambda^2$) eingenommen, liegt die Achse MU parallel zur Elementtangente; ist $AU = AK$, so steht die Achse MU senkrecht zur Elementtangente. Die gesuchte Hüllkurve muss daher in K eine Spitze, in U_t einen Extremwert besitzen. Nun schneidet MU den Kreis K_0 durch U_t mit dem Radius $AK(\lambda^2 - 1)/4\lambda^2$ immer so, dass $AS_1 = (AK + \lambda^2 AU)/2\lambda^2$ ist, also S_1 die Strecke U_tU halbiert. Damit ist aber schon gezeigt, dass die Hüllkurve der Geraden MU eine Steinerzykloide ist, da auf der Gleichheit der Strecken US und U_tS eine bekannte Konstruktion der Steinerzykloiden als Hüllgebilde von Geraden beruht (siehe zum Beispiel [6], Seite 180).

Analog kann der Beweis für die Gerade $M \mathfrak{L}$ bzw. für Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement geführt werden. Die hier angegebene Konstruktionsvorschrift $\mathfrak{B}$ dürfte wohl gleichzeitig eine bisher unbekannte Erzeugungsweise von Steinerzykloiden sein.

J. HOSCHEK, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. HOSCHEK, *Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement*, erscheint demnächst in *Elemente der Mathematik*.
- [2] W. KICKINGER, *Einfacher Beweis eines Satzes von F. Laurenti über Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement*, *Elemente der Mathematik* 18, S. 28–29, 1963.
- [3] F. LAURENTI, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspidata*, *Periodico Mat.* IV. Ser. 38, 155–158, (1960).
- [4] F. LAURENTI, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspidata*, *Archimede* 12, 253–256, (1960).
- [5] J. STEINER, *Vorlesungen über synthetische Geometrie*, Leipzig 1898.
- [6] H. SCHMIDT, *Ausgewählte höhere Kurven*, Wiesbaden 1949.

Über die Nichtprimteiler von $a b^x + c$

Die Primzahl p wird Primteiler der ganzwertigen Funktion $g(x)$ genannt, wenn die Kongruenz $g(x) \equiv 0 \pmod{p}$ eine ganzzahlige Lösung n mit $g(n) \neq 0$ hat. Ist die Kongruenz nicht lösbar, so heisst p Nichtprimteiler (NP) von $g(x)$.

PÓLYA [1] hat gezeigt, dass für ganze a, b, c mit $a c \neq 0, b \geq 2$ die Funktion $g_0(x) = a b^x + c$ unendlich viele Primteiler besitzt. Für die NP von $g_0(x)$ gibt es keine so allgemeine Aussage. Beispielsweise sind nach dem Fermatschen Satz die Primteiler von b die einzigen NP von $b^x - 1$. Für die Existenz von unendlich vielen NP von $g_0(x)$ ist somit eine Zusatzbedingung notwendig, die im Fall $a = 1$ nach SCHINZEL [2] $-c \neq b^k$ lautet. Eine Aussage über die Form der NP gibt der

Satz 1. Ist $(a c, b) = 1, b \geq 2$ und $|a c| \neq u^2$, so ist die Anzahl der NP von $a b^x + c$ in jeder der Restklassen $\pm 1 \pmod{4}$ unendlich¹⁾.

Wird der Definitionsbereich von $g_0(x)$ auf die ungeraden Zahlen beschränkt, so gilt der

Satz 2. Ist $(a c, b) = 1, b \geq 2$ und $b \neq b_1^2$, so ist die Anzahl der NP von $a b^{2x+1} + c$ in jeder der Restklassen $\pm 1 \pmod{4}$ unendlich.

Ohne Einschränkung von b ist Satz 2 nicht richtig. Jede Primzahl $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist nämlich Primteiler von

$$4^{2x+1} - 1 = (2^{2x+1} + 1)(2^{2x+1} - 1) = (2^{(p-1)/2} + 1)(2^{(p-1)/2} - 1).$$

Lemma 1. $p \neq 2, (p, a b c) = 1, (b/p) = 1, (-a c/p) = -1 \Rightarrow p = \text{NP von } g_0(x)$.

Beweis indirekt (Kongruenzen mod p):

$$b \equiv b_0^2, a b^n + c \equiv 0 \Rightarrow a^2 b_0^{2n} + a c \equiv 0, -a c \equiv (a b_0^n)^2, (-a c/p) = 1 \text{ Widerspruch!}$$

¹⁾ Sind b und $a c$ Quadratzahlen, so ist (nach Lemma 1) jedes $a b c$ nicht teilende $p \equiv -1 \pmod{4}$ ein NP von $g_0(x)$. Ist b ein Quadrat, so ist die Bedingung $(a c, b) = 1$ überflüssig, da Satz 1 sofort aus Lemma 1 und Lemma 3 folgt. Ebenso erhält man für $a c = u^2$ und beliebiges $b \geq 2$ unendlich viele NP der Form $4m + 3$