

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1967)
Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$a < \beta < b$ (wenn $\beta = a$ oder $\beta = b$ ist, kann man den Beweis ähnlich führen). Aus der Stetigkeit von f in β folgt die Existenz einer Zahl $\tau > 0$, so dass

$$0 < \tau < \min(\beta - a, b - \beta) \text{ und } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \text{ für } x', x'' \in (\beta - \tau, \beta + \tau).$$

Wählen wir λ_0 so, dass $\beta - \tau < \lambda_0 < \beta$. Nach Voraussetzung hat die Zahl λ_0 die Eigenschaft $S(\varepsilon)$, also existieren positive Zahlen $\delta = \delta(\varepsilon, \lambda_0)$, $\eta = \eta(\varepsilon, \lambda_0)$, so dass $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ ist für $x', x'' \in (-\infty, \lambda_0 + \eta)$ und $|x' - x''| < \delta$. Setzen wir $\delta_1 = \min(\lambda_0 - (\beta - \tau), \delta, \tau) > 0$. Es sei $x', x'' \in (-\infty, \beta + \delta_1)$, $|x' - x''| < \delta_1$. Dann ist mit Rücksicht auf die Wahl der Zahl δ_1 entweder $x', x'' \in (-\infty, \lambda_0)$ oder $x', x'' \in (\beta - \tau, \beta + \tau)$ und in beiden Fällen ist nach dem Vorhergehenden $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Setzen wir $\gamma = \beta + \delta_1 > \beta$. Aus dem Vorigen folgt, dass jedes $\lambda < \gamma$ die Eigenschaft $S(\varepsilon)$ hat (für ein λ mit $\beta < \lambda < \beta + \delta_1$ genügt es, $\delta(\varepsilon, \lambda) = \delta_1$, $\eta(\varepsilon, \lambda) = \beta + \delta_1 - \lambda$ zu setzen).

Nach dem Prinzip der Induktion hat jede reelle Zahl die Eigenschaft $S(\varepsilon)$. Speziell also hat die Zahl b die Eigenschaft $S(\varepsilon)$ (für jedes $\varepsilon > 0$), und daraus folgt schon unmittelbar die gleichmässige Stetigkeit von f .

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

LITERATUR

- [1] O. PERRON, *Die vollständige Induktion im Kontinuum*, Jhb. Deutsch. Math.-Verein. 35, 194–203 (1926).
- [2] A. CHINČIN, *Das einfachste lineare Kontinuum* (russisch), Uspechi matem. nauk 4, 180–197 (1949).

Kleine Mitteilungen

Zur Hyperbel des Menaichmos

Dem MENAICHMOS (ca. 350 v. Chr.) werden bekanntlich zwei Lösungen des «Delischen Problems» der Würfelverdoppelung zugeschrieben. Bei der einen soll er neben einer Parabel eine gleichseitige Hyperbel als geometrischen Ort verwendet haben auf Grund ihrer Asymptoteneigenschaft

$$xy = ab. \quad (1)$$

Seine Lösung, die allerdings nur in einer späten Fassung von EUTOKIOS (5./6. Jh. n. Chr.) überliefert ist, wird in deutscher Übersetzung mitgeteilt bei E. HOPPE [4] und im Originaltext des EUTOKIOS mit etwas havarieter Übersetzung bei C. A. BRETSCHNEIDER [1]. MENAICHMOS soll auch gezeigt haben, dass die von ihm benützten Kurven als ebene Schnitte an Rotationskegeln auftreten, was allerdings von J. TROPFKE [5] ziemlich kategorisch bezweifelt wird. Für die Parabel wäre ein solcher Identitätsnachweis zwar sehr einfach, für die gleichseitige Hyperbel nur dann, wenn der Schnitt parallel zur Achse eines rechtwinkligen Kegels geführt wird (siehe K. FLADT [2]). Nach der (nicht unangefochtenen) Überlieferung hätten aber die Mathematiker vor ARCHIMEDES die Schnitte am Drehkegel stets senkrecht zu einer Mantellinie angenommen und deshalb für die Hyperbel einen stumpfwinkligen Kegel gebraucht (siehe BRETSCHNEIDER [1], S. 156). ZEUTHEN [7] berücksichtigt diesen Umstand für seine Rekonstruktion eines für MENAICHMOS möglichen Beweises in seinem klassischen Buch.

Die Strecken $\overline{PR_1}$ und $\overline{PR_2}$ sind $\sqrt{2}$ -mal länger als die Abstände x, y des Punktes P von l und m . Es ist zu zeigen, dass das Produkt $p = \overline{PR_1} \overline{PR_2} = 2xy$ konstant, d.h. unabhängig von ξ ist, wenn a passend gewählt wird. Wir setzen noch $\overline{C'P'} = w$, $\overline{P'B} = v$, also $v + w = 3u$.

Nun ist $p = \overline{R_1P'}^2 - \overline{PP'}^2$ und $\overline{R_1P'} = a + \xi$, $\overline{PP'}^2 = \overline{AP'} \overline{P'B} = (u + w)v$. Da $\xi/\eta = v/3u$ und nach (4) $\eta = u\sqrt{3}$, so ist $\xi = v/\sqrt{3}$, und es wird

$$p = \left(a + \frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{v+w}{3} + w\right)v = a^2 + \left(\frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{4w}{3}\right)v.$$

Lässt man nun den Punkt P auf der Schnittkurve und damit den «Grundkreis» auf der Kegelfläche variieren, so bleiben a und w konstant; der Koeffizient von v kann durch die Wahl von $a = 2w/\sqrt{3}$ zum Verschwinden gebracht werden. Damit ist die Konstanz von $p = 2xy = a^2$ erreicht.

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. A. BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor EUKLIDES*, 1870, S. 159.
- [2] K. FLADT, *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte*, 1965, S. 6–7.
- [3] TH. HEATH, *A Manual of Greek Mathematics*, Oxford 1931, S. 155–157.
- [4] EDM. HOPPE, *Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum*, Heidelberg 1911, S. 188–189.
- [5] JOH. TROPFKE, *Geschichte der Elementarmathematik*, 2. A., Band VI, S. 131.
- [6] B. L. VAN DER WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*, Basel 1956, S. 249–250.
- [7] H. G. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, S. 462–465.

Aufgaben

Aufgabe 525. Die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind Zentren von drei gleichen Kreisen K_1, K_2, K_3 vom Radius r . Ein beliebiger Punkt P der Ebene des Dreiecks werde an K_1 nach P_1 gespiegelt, ebenso P_1 an K_2 nach P_2 und P_2 an K_3 nach P_3 . Welches ist der geometrische Ort der Fixpunkte der Abbildung $P \rightarrow P_3$, wenn r variiert?

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

1. *Lösung.* Zunächst zwei Vorbetrachtungen. a) Bezeichnet s_i die Spiegelung am Kreis K_i ($i = 1, 2, 3$), dann gilt $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = e$ (= identische Abbildung). Aus der Frage nach den Punkten P mit $s_3 s_2 s_1(P) = P$ ergibt sich daher wegen der Umkehrbarkeit der Abbildungen s_i als gleichwertig $s_2 s_1(P) = s_3(P)$ mit $s_2 s_1(P) = s_2(P_1) = P_2$. – b) Wird die Ebene als komplexe Zahlenebene aufgefasst, dann stellt sich die Spiegelung s_i an dem Kreis $K_i(M_i; r)$ dar in der Form

$$s_i(P) = M_i + \frac{r^2}{\overline{P} - \overline{M}_i} = \frac{r^2 - M_i \overline{M}_i + M_i \overline{P}}{\overline{P} - \overline{M}_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Es kann ohne Einschränkung $M_1 = O$, $M_2 = \sqrt{3} + i =: M$, $M_3 = \sqrt{3} - i =: \overline{M}$ angenommen werden; die Seitenlänge des Dreiecks ist dann gleich 2 und $I = 2/\sqrt{3}$ der Mittelpunkt. Dann ist

$$s_1(P) = P_1 = \frac{r^2}{\overline{P}}, \quad s_2(P_1) = s_2 s_1(P) = \frac{(r^2 - 4)P + M r^2}{r^2 - \overline{M} P},$$

$$s_3(P) = \frac{r^2 - 4 + \overline{M} \overline{P}}{\overline{P} - M}.$$