

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1967)
Heft: 2

Artikel: On a diophantine equation
Autor: Szymiczek, K.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-25355>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

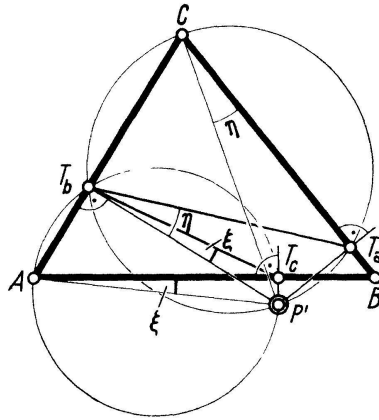
Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Punkte P', A, T_b, T_c und P', C, T_a, T_b liegen nach dem Satz von Thales je auf einem Kreis (siehe Figur 2). Bei allgemeiner Wahl von P' ergeben sich aus dem Peripheriewinkelsatz folgende gleiche Winkel: $\xi = \sphericalangle P'AB = \sphericalangle P'T_bT_c$, $\eta =$



Figur 2

$\sphericalangle P'CB = \sphericalangle P'T_bT_a$. Also unterscheiden sich ξ und η um $\sphericalangle T_aT_bT_c$. Genau dann, wenn T_a, T_b, T_c auf einer Geraden liegen, müssen ξ und η gleich sein, daher die vier Punkte A, B, C, P' auf einem Kreis liegen. Also: *Dann und nur dann liegen T_a, T_b, T_c auf einer Geraden, wenn P' auf den Umkreis des Dreiecks $\triangle$ fällt.*

In Verbindung mit der Deutung von (4) erhält man das Ergebnis: *Die gefährliche Fläche beim räumlichen Rückwärtsschnitt ist jener Drehzylinder, der die Ebene ε nach dem Umkreis des Dreiecks $\triangle$ schneidet.*

H. STACHEL, Graz

On a Diophantine Equation

A. SCHINZEL and W. SIERPIŃSKI [2]¹⁾ have recently showed that all solutions of the equation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = \left(\left(\frac{y-x}{2} \right)^2 - 1 \right)^2 \quad (1)$$

in natural numbers $x, y, x < y$ are of the form $x = x_n, y = x_{n+1}, n = 0, 1, \dots$, where $x_0 = 1, x_1 = 3, x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$. Equation (1) is a special case of the equation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2 \quad (2)$$

whose all solutions are still unknown (cf. [2]–[5]). Moreover, the only known solution of (2) which is not a solution of (1) is $x = 4, y = 31, z = 11$ ([5]; cf. [2], [3]).

The purpose of this note is to give all solutions in natural numbers t, x, y of the equation

$$(x^2 - t^2)(y^2 - t^2) = \left(\left(\frac{y-x}{2} \right)^2 - t^2 \right)^2. \quad (3)$$

¹⁾ Numbers in brackets refer to References, page 38.

We shall prove the following

Theorem. All solutions of the Equation (3) in distinct natural numbers $t, x, y, x < y$, are of the form

$$t = |m^2 - 2n^2|k, \quad x = (m^2 + 2n^2)k, \quad y = (3m^2 + 8mn + 6n^2)k, \quad (4)$$

where m, n, k are natural numbers.

Proof. As in [2] we observe that

$$(x^2 - t^2)(y^2 - t^2) - \left(\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 - t^2\right)^2 = -\frac{1}{16}(x+y)^2(x^2 - 6xy + y^2 + 8t^2).$$

Thus (3) is equivalent to

$$x^2 - 6xy + y^2 + 8t^2 = 0,$$

which may be written in the form

$$(y - 3x)^2 = 8(x^2 - t^2). \quad (5)$$

First of all, $t < x$. Further, from (5) it follows that $4 | y - 3x$, so $y - 3x = 4z$, where $z > 0$, since otherwise $(y - x)/2 \leq x$ and from $t < x < y$ and (3) we get $(x^2 - t^2)(y^2 - t^2) \leq (x^2 - t^2)^2$, $y \leq x$, which is impossible.

Thus $z > 0$ and (5) can be written as

$$2z^2 + t^2 = x^2. \quad (6)$$

Consequently, every solution of (5) in natural numbers $t, x, y, x < y$, gives a solution of (6) in natural numbers t, x, z , where $4z = y - 3x$. On the other hand, if t, x, z is a solution of (6) in natural numbers, then the numbers $t, x, y = 3x + 4z$ are natural, $x < y$, and they form a solution of (5).

Thus, in order to find all solutions of (3) in natural numbers $t, x, y, x < y$ it suffices to know all solutions of (6) in natural numbers t, x, z and put $y = 3x + 4z$.

But all solutions of (6) are the following (cf. [1], p. 41):

$$t = |m^2 - 2n^2|k, \quad x = (m^2 + 2n^2)k, \quad z = 2mnk,$$

where m, n, k are natural numbers. If we put here $y = 3x + 4z$, we get the formulae (4), which completes the proof.

K. SZYMICZEK, Katowice, Poland

REFERENCES

- [1] L. E. DICKSON, *Introduction to the Theory of Numbers*, Dover Publications, New York 1957.
- [2] A. SCHINZEL et W. SIERPIŃSKI, *Sur l'équation diophantienne $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = [((y - x)/2)^2 - 1]^2$* , *El. Math.* 18, 132-133 (1963).
- [3] A. SCHINZEL i W. SIERPIŃSKI, *O równaniu $x^2 - 2y^2 = k$* , *Roczniki PTM, Seria II: Wiadomości Matematyczne* 7, 229-232 (1964).
- [4] K. SZYMICZEK, *L'équation $uv = w^2$ en nombres triangulaires*, *Publications de l'Institut Mathématique Beograd* 3 (17), 139-141 (1963).
- [5] K. SZYMICZEK, *O pewnych równaniach diofantycznych związanych z liczbami trójkątnymi*, *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Katowicach, Sekcja Matematyki* 4, 17-22 (1964).