

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 23 (1968)
Heft: 1

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Da $|M_\beta| = C$ und die rechtsgeschriebenen Mengen von einer Mächtigkeit $< C$ sind, muss so ein X_γ existieren. Wir definieren nun

$$V'_{\alpha\beta} = \bigcup_{\delta \leq \alpha} T_\delta^{-1}(V_{\alpha\beta}) \cup \{X'_\varepsilon\},$$

wo X'_ε das erste Element von M_β ist, das nicht zu $U_\alpha \cup \bigcup_{\delta < \beta} V_{\alpha\delta}$ gehört.

Wenn nun $S = \bigcup S_\alpha$, dann enthält für jedes Paar von Ordinalzahlen β, γ ($|\beta|, |\gamma| < C$) die Menge $(S - T_\beta(S)) \cap M_\gamma$ die Punkte von $V_{\alpha\gamma}$ für jedes $\alpha \geq \max\{\beta, \gamma\}$. Die Menge $S - T_\beta(S)$ ist also zusammenhängend und S ist überall dicht. Andererseits trifft die Komplementärmenge $S' = \bigcup S'_\alpha$ nach Konstruktion auch jedes M_γ , ist also sicher überall dicht.

Mit derselben Methode könnte man folgende Verallgemeinerung von Satz 2 beweisen:

Satz 2'. Es sei T eine Menge von eindeutigen Abbildungen eines reellen Vektorraumes V der Dimension $\leq \aleph_0$ in sich, so dass $|T| \leq C$ und die Fixpunkte von weniger als C Abbildungen aus T den Raum nicht trennen. Dann gibt es eine Menge $S \subset V$, die zugleich mit ihrem Komplement überall dicht ist und die die F -Eigenschaft für T hat.

PAUL ERDÖS, Mathematisches Institut, Budapest und
E. G. STRAUS*), University of California, Los Angeles

LITERATUR

- [1] L. FEJES-TÓTH, *Eine Kennzeichnung des Kreises*, *El. Math.* 21, 25–27 (1967).
- [2] H. KNESER, *Eine Erweiterung des Begriffes «konvexer Körper»*, *Math. Ann.* 82, 287–296 (1921).

*) The work of the second author was supported in part by a grant from the National Science Foundation.

Ungelöste Probleme

Nr. 49. Es bezeichne R den dreidimensionalen euklidischen Raum, $Z \in R$ einen fest gewählten Ursprung und $A \subset R$ einen eigentlichen Eikörper, der den Ursprung enthält, so dass fortan stets $Z \in A$ vorausgesetzt ist. Bedeutet V das Volumen, so gilt offenbar $V(A) > 0$. Ferner bezeichne $E_u \subset R$ die durch Z hindurchgehende Ebene, deren Normalenrichtung durch den Einheitsvektor u gegeben ist. Schliesslich soll f den ebenen Flächeninhalt anzeigen, so dass $f(A \cap E_u)$ die Schnittfläche darstellt, welche die Ebene E_u aus dem Eikörper A ausschneidet.

Unser Interesse gilt den beiden durch die Ansätze

$$p = \sup_A \inf_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} \quad (1)$$

$$q = \inf_A \sup_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} \quad (2)$$

definierten Zahlwerten. Die Existenz von q ist trivial, diejenige von p ergibt sich weiter unten.

Das mit (1) angesetzte Problem in etwas anderer gleichwertiger Weise formuliert, lautet wie folgt:

Gesucht ist der grösste Wert, den der kleinste Flächeninhalt der Schnittbereiche annehmen kann, die von den durch einen Punkt eines Eikörpers vom Volumen $V = 1$ hindurchgehenden Ebenen aus diesem ausgeschnitten werden.

Die Lösung dieses Problems ist einfach, und der mit (1) gefragte MaxMin-Wert p ist durch

$$p = 9\pi/16 \sim 1,767 \quad (3)$$

gegeben. Der Extremwert (3) stellt sich ein, wenn A eine Kugel mit Zentrum Z ist. Der Nachweis unserer Behauptung ergibt sich leicht mit einer integralgeometrischen Ungleichung von H. BUSEMANN¹⁾, wonach

$$\frac{1}{4\pi} \int [f(A \cap E_u)]^3 du \leq \frac{9\pi}{16} V(A)^2 \quad (4)$$

ist. Hierbei bezeichnet du die Richtungsichte, also die linke Seite den über alle Richtungen u erstreckten Integralmittelwert der dritten Potenz der Schnittfläche von A mit E_u . Aus der Busemannschen Ungleichung (4) folgert man zunächst, dass

$$\inf_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} \leq 9\pi/16$$

sein muss, also damit erstens die Existenz von p und zweitens die Abschätzung $p \leq 9\pi/16$. Mit der Bemerkung, dass eine Kugel mit Zentrum Z das Gleichheitszeichen beansprucht, schliesst man auf (3).

Überraschenderweise scheint nun das mit (2) angeschnittene Problem schwieriger zu sein. Wenn über A keine zusätzliche Forderung gestellt wird, beispielsweise etwa die Voraussetzung, zentralsymmetrisch zu sein²⁾, so ist sicher, dass hier nicht die Kugel extremal ist und dass der mit (2) erfragte MinMax-Wert q kleiner als $9\pi/16$ sein muss. Durch das unten erklärte Beispiel wird belegt, dass

$$q \leq 243/32 \pi^2 \sim 0,769 \quad (5)$$

gilt. In der Tat: Wählt man für A einen geraden Kreiskegel mit Spitze Z , der Höhe $h = 1$ und mit Grundkreisradius $r = \sqrt{2}$, so folgt mit elementarer Diskussion zunächst $\sup_u f(A \cap E_u) = 3/2$ und $V(A) = 2\pi/3$, so dass also bei diesem speziellen Körper $\sup_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} = 243/32 \pi^2$ und damit unsere Behauptung (5) resultiert.

Ungelöst bleibt unseres Wissens also das mit (2) eröffnete Problem, das wir wie oben bei (1) in gleichwertiger Weise etwas anders formulieren: *Gesucht ist der kleinste Wert, den der grösste Flächeninhalt der Schnittbereiche annehmen kann, die von den durch einen Punkt eines Eikörpers vom Volumen $V = 1$ hindurchgehenden Ebenen aus diesem ausgeschnitten werden.*

Diese sprachliche Fassung unserer Frage unterstellt, dass die gesuchte Schranke auch angenommen wird und bei einem nichtkugelförmigen unbekannten Extremalkörper realisiert werden kann. Dies ist abzuklären.

H. HADWIGER

¹⁾ Unsere Ungleichung ist ein Spezialfall einer sehr allgemeinen Integralrelation, die sich auf $n - 1$ verschiedene Eikörper des n -dimensionalen Raumes bezieht. Vgl. H. BUSEMANN, Volume in Terms of Concurrent Cross Sections, Pac. J. Math. 3, 1-12 (1953).

²⁾ In diesem besonderen Fall, also für Mittelpunktseikörper, zeigt sich, dass $q = 9\pi/16$ dann gilt, wenn die mit dem Ungelösten Problem Nr. 44, El. Math. 17, 84 (1962) dargelegte Busemannsche Ungleichheitsaussage zutrifft. Vgl. hierzu H. BUSEMANN und C. M. PETTY, Problems on Convex Bodies, Math. Scand. 4, 88-94 (1956); insb. Problem 4.