

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 23 (1968)
Heft: 4

Artikel: Über Drehflächenumrisse in Perspektive und schiefer Axonometrie
Autor: Tschupik, Josef P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26030>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 23

Heft 4

Seiten 73–96

10. Juli 1968

Über Drehflächenumrisse in Perspektive und schiefer Axonometrie

Es sei ein Zentralriss (Perspektive) oder Parallelriss durch seine Bildebene Π und durch sein eigentliches oder uneigentliches Projektionszentrum O vorgegeben. Φ sei eine abzubildende Drehfläche; ihre Achse heiße a .

Der aus O an Φ gelegte Tangentialkegel bzw. -zylinder Ψ berührt Φ längs des sog. *wahren Umrissses* u von Φ – der i. allg. eine Raumkurve ist – und schneidet Π in dem von uns gesuchten sog. *scheinbaren Umriss* u^1 von Φ . Im Gegensatz zu den üblichen Konstruktionsmethoden, nach denen man zuerst die auf Φ liegende Kurve u und hierauf ihr Bild u^1 ermittelt, soll hier ein Weg gezeigt werden, bei dem man den wahren Umriss u nicht benützt.

Wir gehen davon aus, dass u^1 durch Kollineation bzw. Affinität aus jedem beliebigen (nicht durch O gehenden) ebenen Schnitt von Ψ gewonnen werden kann und benützen dann die Tatsache, dass sich insbesondere der Schnitt u^ε von Ψ mit einer beliebigen zu a normalen Ebene ε leicht konstruieren lässt. Es liegt nahe, ε als neue Bildebene und u^ε als *Hilfsumriss* von Φ in ε zu deuten¹⁾.

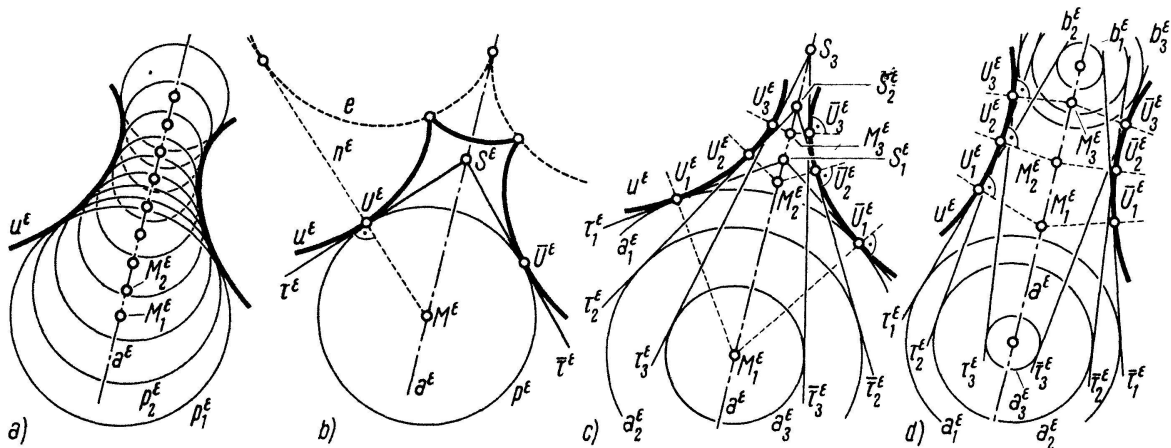
Das Verfahren ist vor allem für die Bedürfnisse der Architekturperspektive gedacht, kann jedoch auch in der schiefen Axonometrie eingesetzt werden. In der Perspektive ist es stets verwendbar, da sich immer eine geeignete zu a normale Ebene ε finden lässt, die nicht Sehebene ist. Bei einem Parallelriss kann es möglich sein, dass es keine derartige Ebene gibt. Denkt man sich den Parallelriss als schiefe Axonometrie, so wird man naheliegenderweise die Drehflächenachse in eine der Koordinatenachsen legen. Da dann aber die zu ihr normale Koordinatenebene gewiss keine Sehebene ist, ist bei solchen Anordnungen das Verfahren auch in schiefer Axonometrie stets verwendbar. Eine Verwendung bei Normalrissen – insbesondere in normaler Axonometrie – wäre möglich, doch besteht dort kein Grund, von den bewährten Verfahren abzugehen.

¹⁾ In diesem Zusammenhang sei auf den Aufsatz von F. HOHENBERG, *Ein einfacher Beweis des Satzes von Pohlke*, El. Math. 10 (1955) hingewiesen, in dem ein schiefaxonometrischer Kugelumriss affin aus einem frontalaxonometrischen Hilfsumriss gewonnen wurde.

1. Bemerkungen zum Hilfsumriss u^ε in ε

1.1. Da die Parallelkreise p_i ($i = 1, 2, \dots$) von Φ parallel zu ε liegen, erscheinen sie bei Zentral- wie auch bei Parallelprojektion auf ε als Kreise p_i^ε (Figur 1a). Bilder ihrer auf a liegenden Mittelpunkte M_i sind die auf a^ε liegenden Mittelpunkte M_i^ε der p_i^ε . u^ε ist dann offenbar Hüllkurve der Kreise p_i^ε . Dies reicht bereits für eine Schnellkonstruktion von u^ε aus, wenn u^ε einfach ist, insbesondere also, wenn u^ε keine Spitzen besitzt.

1.2. Für höhere Ansprüche konstruieren wir u^ε punkt- und tangentialweise mit Hilfe der bekannten Kegelmethode²⁾ (Figur 1b). Wir bedenken dazu, dass die Tangentialebenen an Φ längs eines fixen Parallelkreises p einen Drehkegel (-zylinder) κ mit auf a liegender Spitze S umhüllen. p^ε , S^ε seien die Bilder von p , S in ε .



Figur 1

Ist U ein auf p liegender Punkt des wahren Umrisses u , so berührt die in U an Φ gelegte Tangentialebene τ die Kurven u , p sowie die Flächen Ψ , κ in U und geht durch O und S . τ erscheint daher in ε als Tangente τ^ε aus S^ε an p^ε . Der Berührungspunkt U^ε von τ^ε mit p^ε ist nach dem Gesagten auch Berührungspunkt von τ^ε mit u^ε . Somit ist τ^ε , U^ε ein Linienelement von u^ε . Die zweite Tangente aus S^ε an p^ε liefert ein weiteres Linienelement $\bar{\tau}^\varepsilon$, $\bar{U}^\varepsilon$.

Verbindet man U^ε mit dem Mittelpunkt M^ε von p^ε , so erhält man die Kurvennormale n^ε von u^ε in U^ε . Man kann demnach mühelos die Evolute e von u^ε als Hüllkurve der Geraden n^ε zeichnen und gewinnt z. B. Spitzen oder Spitzpunkte von u^ε aus der bekannten Tatsache, dass sie auf e liegen müssen.

1.3. Da τ^ε , $\bar{\tau}^\varepsilon$ den scheinbaren Umriss von κ in ε bilden, benötigt man für ihre Konstruktion nicht p^ε , sondern nur das Bild irgendeines Parallelkreises von κ . Man kommt so zu folgender modifizierter Konstruktion von u^ε (Figur 1c):

Für eine Serie von Parallelkreisen p_i ($i = 1, 2, \dots$) seien M_i die Mitten, κ_i die zugehörigen Tangentialkegel, S_i deren Spitzen und a_i die Schnittkreise der κ_i mit einer Normalebene α zu a . Liegen dann die Bilder a_i^ε , S_i^ε , M_i^ε vor, so findet man die Umriss-erzeugenden τ_i^ε , $\bar{\tau}_i^\varepsilon$ von κ_i als Tangenten aus S_i^ε an a_i^ε und die Umrisspunkte U_i^ε , $\bar{U}_i^\varepsilon$ auf ihnen als Fusspunkte der aus M_i^ε gefällten Normalen.

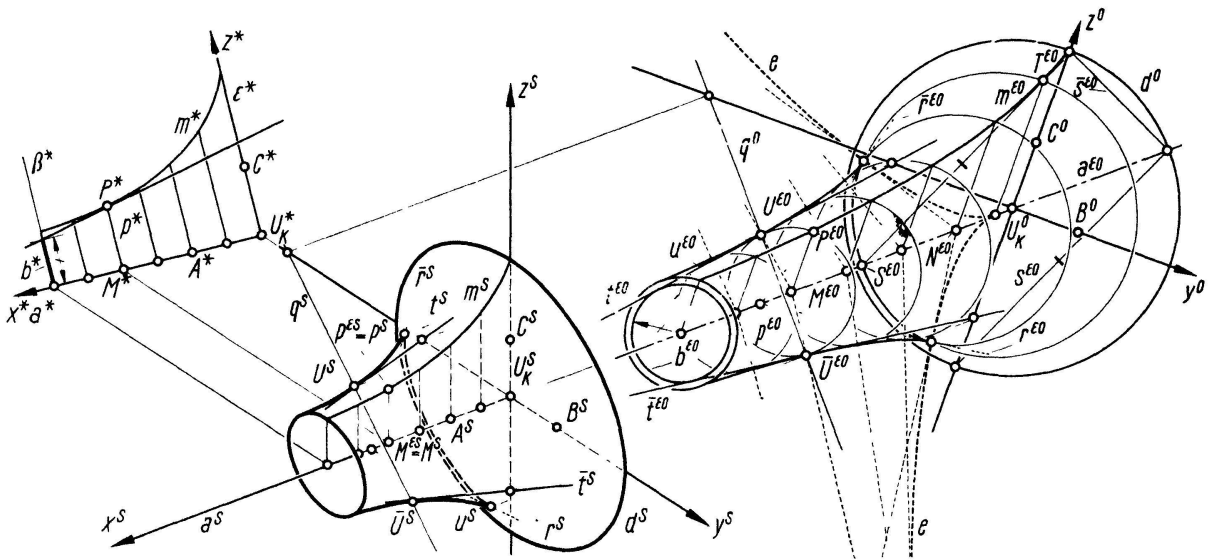
²⁾ Vgl. etwa E. MÜLLER und E. KRUPPA, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 5. Aufl. (Springer, Wien 1948), S. 183.

1.4. Werden in der Anordnung 1.3. die S_i^e unzugänglich, so schneidet man die κ_i ausser mit α noch mit einer zweiten Normalebene β zu a nach Kreisen b_i . τ_i^e , $\bar{\tau}_i^e$ sind dann gemeinsame Tangenten an $\dot{a}_i$ und b_i (Figur 1d).

Je nach Gestalt des Umrisses u^e wird man eine der in 1.1. bis 1.4. angeführten Konstruktionen verwenden.

2. Umrisskonstruktion in schiefer Axonometrie

U_K^s, x^s, y^s, z^s seien die schiefaxonometrischen Bilder des Ursprungs und der Achsen und A^s, B^s, C^s die der Achseneinheitspunkte eines rechtwinkligen cartesischen Achsenkreuzes (Figur 2). Die Achse a der Drehfläche Φ liege in der x -Achse. Φ sei dadurch bestimmt, dass wir den in der xz -Ebene liegenden Meridian m von Φ im xz -Einschneideriss³⁾ $\mathfrak{E}^*$ als m^* vorgeben. Als Hilfsebene ε wählen wir die yz -Ebene. ε erscheint im yz -Einschneideriss $\mathfrak{E}^0$ bis auf den Maßstab unverzerrt als ε^0 . u^{ε^0} wird sich daher leicht konstruieren lassen.



Figur 2

Aus den bekannten Eigenschaften des Einschneiderverfahrens folgt, dass ε^0 aus dem axonometrischen Bild ε^s vermöge einer perspektiven Affinität $\mathfrak{A}$ hervorgeht. $\mathfrak{A}$ ist durch die entsprechenden Dreiecke $U_K^s B^s C^s, U_K^0 B^0 C^0$ festgelegt und besitzt die Einschneiderstrahlen ($\parallel x^s$) als Affinitätsstrahlen. Konstruieren wir u^{ε^0} und führen u^{ε^0} vermöge $\mathfrak{A}^{-1}$ in u^{ε^s} über, so ist u^{ε^s} bereits der gesuchte Umriss u^s von Φ . Da nämlich u, u^e, u^s auf demselben Sehstrahlenzylinder Ψ liegen, muss $u^{\varepsilon^s} \equiv u^s$ sein.

Wir betrachten nun die Konstruktion der von einem Parallelkreis p rührenden Umrisspunkte $U^s, \bar{U}^s$. p sei durch seinen Mittelpunkt M und seinen Schnittpunkt P mit m festgelegt und durch sein Bild p^* in $\mathfrak{E}^*$ vorgegeben. Wir gehen zuerst von der zu z^* parallelen Strecke $M^* P^*$ mit Hilfe des Einschneiderverfahrens zu $M^s P^s = M^{\varepsilon^s} P^{\varepsilon^s} (\parallel z^s)$ und hierauf vermöge $\mathfrak{A}$ zu $M^{\varepsilon^0} P^{\varepsilon^0}$ in $\mathfrak{E}^0$ über. Der Bildkreis p^{ε^0} ist dann durch Mitte M^{ε^0} und Peripheriepunkt P^{ε^0} bestimmt. (Läuft P auf m , so beschreiben P^s, P^{ε^0} die Kurven m^s, m^{ε^0} .) Da in Figur 2 die Spitze des Φ längs p berühren-

³⁾ Hinsichtlich des Einschneiderverfahrens vgl. etwa F. HOHENBERG, *Konstruktive Geometrie in der Technik*, 3. Aufl. (Springer, Wien-New York 1966), S. 81 f.

den Kegels κ unzugänglich ist, wird κ mit der zu ε parallelen Ebene β nach dem Kreis b geschnitten. Der scheinbare Umriss von κ in ε^0 wird dann von einem Paar gemeinsamer Tangenten $t^{\varepsilon 0}, \bar{t}^{\varepsilon 0}$ an $p^{\varepsilon 0}$ und $b^{\varepsilon 0}$ gebildet. Die aus $M^{\varepsilon 0}$ auf $t^{\varepsilon 0}, \bar{t}^{\varepsilon 0}$ gefällten Normalen bedeuten gemäss 1. Tangenten der Evolute e von $u^{\varepsilon 0}$. Die auf $t^{\varepsilon 0}, \bar{t}^{\varepsilon 0}$ liegenden Normalenfusspunkte sind die Umrisspunkte $U^{\varepsilon 0}, \bar{U}^{\varepsilon 0}$ auf $p^{\varepsilon 0}$. Sie werden in Figur 2 mit Hilfe der Geraden q^0 der Affinität $\mathfrak{A}^{-1}$ unterworfen und liefern so $U^s, \bar{U}^s$.

Vergleicht man den Verlauf von $u^{\varepsilon 0}$ und e , so kann man ziemlich genau die Lage der Spitzen von $u^{\varepsilon 0}$ abschätzen und durch geeignete Wahl des Parallelkreises graphisch ermitteln. In Figur 2 liefert der Parallelkreis mit dem Mittelpunkt N die Spitzen von $u^{\varepsilon 0}$ mit den Spitzentangenten $r^{\varepsilon 0}, \bar{r}^{\varepsilon 0}$. Vermöge $\mathfrak{A}^{-1}$ erhält man aus ihnen Spitzen und Spitzentangenten von u^s .

Kommt $p^{\varepsilon 0}$ in eine Lage, in der seine beiden Berührungspunkte $U^{\varepsilon 0}, \bar{U}^{\varepsilon 0}$ mit $u^{\varepsilon 0}$ in einem Punkt $S^{\varepsilon 0}$ auf $a^{\varepsilon 0}$ zusammenfallen, dann ist offenbar wegen der vierpunktigen Berührung von $p^{\varepsilon 0}$ und $u^{\varepsilon 0}$ der Punkt $S^{\varepsilon 0}$ ein Scheitel von $u^{\varepsilon 0}$ und $p^{\varepsilon 0}$ der zugehörige Scheitelkrümmungskreis. Sein Mittelpunkt ist eine Spitze von e . Diese Situation tritt genau dann ein, wenn das Bild $S^{\varepsilon 0}$ der Spitze S des Φ längs p berührenden Kegels auf $p^{\varepsilon 0}$ zu liegen kommt. Da ein solcher Kegel einen Sehstrahl als Erzeugende besitzt, sind alle derartigen Kegel zueinander kongruent. Wir legen einen solchen Kegel durch den in ε liegenden Parallelkreis d von Φ . In $\mathfrak{E}^0$ bedeuten dann die Geraden $s^{\varepsilon 0}, \bar{s}^{\varepsilon 0}$ die Bilder seiner in der xz -Ebene liegenden Erzeugenden. Besitzt also $m^{\varepsilon 0}$ Tangenten der Richtungen $s^{\varepsilon 0}, \bar{s}^{\varepsilon 0}$ so schneiden diese $a^{\varepsilon 0}$ in Scheiteln von $u^{\varepsilon 0}$. In Figur 2 existiert eine Tangente der Richtung $s^{\varepsilon 0}$ in $T^{\varepsilon 0}$ und liefert den Scheitel $S^{\varepsilon 0}$.

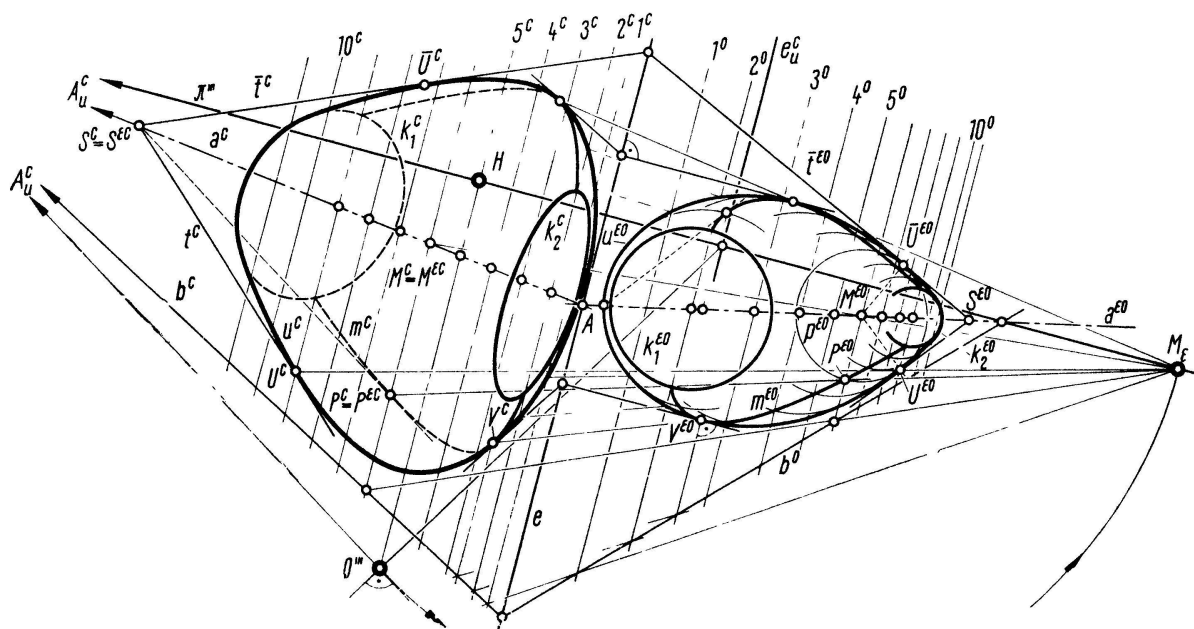
3. Umrisskonstruktion in Perspektive

Wir behandeln diese Konstruktion für den allgemeinsten Fall, dass die Achse a der Drehfläche Φ beliebig gegen die Bildebene Π geneigt ist. Die Perspektive sei durch Hauptpunkt H und Bildweite $d = H O''$ in Figur 3 festgelegt. a^c sei perspektives Bild, A_u^c Fluchtpunkt und A Bildspurpunkt von a . e und e_u^c seien Bildspur und Fluchtspur einer zu a normalen Ebene ε , wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit e durch A legen⁴⁾. Φ sei durch das Bild m^c jenes Meridians m vorgegeben, dessen Ebene ebenfalls die Bildspur e hat. M_ε sei Drehsehnenfluchtpunkt (Messpunkt) für eine der beiden möglichen Drehungen von ε nach Π . Das unverzerrte Punktfeld der mit Π vereinigten Drehlage von ε bezeichnen wir mit ε^0 . Bekanntlich besteht zwischen den Punktfeldern ε^c und ε^0 eine perspektive Kollineation $\mathfrak{R}$ mit Achse e , Gegenachse e_u^c und Zentrum M_ε . In der Drehlage ε^0 werden wir nun den Hilfsumriss u^ε von Φ als $u^{\varepsilon 0}$ darstellen. Vermöge $\mathfrak{R}^{-1}$ erhalten wir dann aus ihm den gesuchten Umriss u^c von Φ als $u^c = u^{\varepsilon c}$.

Legt man durch einen Punkt P^c von m^c eine Parallele zu e (Bild einer Hauptgeraden von ε), so schneidet diese a^c im Bild M^c des Mittelpunktes des durch P gehenden Parallelkreises p von Φ . Bezeichnen wir die aus O auf ε projizierten Punkte mit dem Index $^\varepsilon$, so gilt $P^c = P^{\varepsilon c}$ und $M^c = M^{\varepsilon c}$. Vermöge $\mathfrak{R}$ gehen $M^{\varepsilon c}, P^{\varepsilon c}$ in $M^{\varepsilon 0}, P^{\varepsilon 0}$ über und es ist der Bildkreis $p^{\varepsilon 0}$ von p durch Mitte $M^{\varepsilon 0}$ und Peripheriepunkt

⁴⁾ Verschiebt man ε parallel, so erhält man ähnliche Schnitte des aus O an Φ gelegten Tangentialkegels ψ . Durch die Wahl von ε kann man daher die Grösse des Hilfsumrisses beeinflussen.

$P^{\varepsilon 0}$ bestimmt. In gleicher Weise transformieren wir den Punkt $S^{\varepsilon c}$ nach $S^{\varepsilon 0}$, wobei S den Schnittpunkt der Tangente von m in P mit a – also die Spitze des Φ längs p berührenden Kegels κ – bedeute. Gemäss 1. liefern dann die aus $S^{\varepsilon 0}$ an $p^{\varepsilon 0}$ gelegten Tangenten zwei Linienelemente $U^{\varepsilon 0}$, $t^{\varepsilon 0}$ und $\bar{U}^{\varepsilon 0}$, $\bar{t}^{\varepsilon 0}$ des Hilfsumrisses $u^{\varepsilon 0}$. Vermöge $\mathfrak{R}^{-1}$ erhält man aus ihnen die Linienelemente U^c , t^c und $\bar{U}^c$, $\bar{t}^c$ von u^c .



Figur 3

Figur 3 zeigt die Schnellkonstruktion von u^c . $u^{\varepsilon 0}$ wird zuerst als Hüllkurve der Kreise $p^{\varepsilon 0}$ gewonnen. Hierauf werden die Schnittpunkte von $u^{\varepsilon 0}$ mit einem System zu e paralleler Geraden 1° , 2° , 3° , ... der Kollineation $\mathfrak{R}^{-1}$ unterworfen⁵⁾. (Da $a^{\varepsilon 0}$ und a^c von den Kollineationsstrahlen sehr schleifend geschnitten werden, werden 1° , 2° , ... nicht vermöge ihrer Schnittpunkte mit $a^{\varepsilon 0}$, sondern vermöge jener mit einer günstigen Hilfsgeraden b^0 transformiert). Den Scheitel von $u^{\varepsilon 0}$ gewinnt man durch die bereits in 2. beschriebene Überlegung.

Im selben Arbeitsgang mit der Umrisskonstruktion können auch Parallelkreise und Meridiane von Φ dargestellt werden. Dass die Parallelkreisbilder k_1^c , k_2^c (Ellipsen) in Figur 3 vermöge $\mathfrak{R}^{-1}$ aus den Kreisen $k_1^{\varepsilon 0}$, $k_2^{\varepsilon 0}$ hervorgehen, ist einleuchtend. Für die Meridiandarstellung ist nur zu bedenken, dass eine fixe Meridianebene die Parallelkreisebenen nach parallelen Durchmessern der Parallelkreise schneidet. Man müsste also nur eine solche Schar paralleler Durchmesser in ε^0 abbilden, mit den Parallelkreisbildern schneiden und das durch diese Schnittpunkte bestimmte Meridianbild vermöge $\mathfrak{R}^{-1}$ transformieren.

Berührt ein Meridianbild $m^{\varepsilon 0}$ ein Parallelkreisbild $p^{\varepsilon 0}$, so ist offenbar die von den Tangenten an m und p im Schnittpunkt V von m und p aufgespannte Tangentialebene an Φ eine Sehebene, also V ein Punkt des wahren Umrisses u . Berührungspunkte von $m^{\varepsilon 0}$ mit Parallelkreisbildern liefern demnach vermöge $\mathfrak{R}^{-1}$ die Umrisspunkte von m^c ,

⁵⁾ Wenn e_u^c von u^c geschnitten wird, hat $u^{\varepsilon 0}$ Fernpunkte. In einem solchen Fall wird man von der in 1.4. angegebenen Konstruktion ausgehen und u^c evtl. tangentialweise ermitteln.

also die Berührungspunkte von m^c mit u^c . Berührende Parallelkreisbilder sind aber leicht zu finden, da die Tangenten an alle Kreise $p^{\varepsilon 0}$ in ihren Schnittpunkten mit $m^{\varepsilon 0}$ dieselbe Richtung haben. Figur 3 zeigt nach dieser Methode die Umrisspunkt-konstruktion für den gegebenen Meridian m ; die erwähnte Tangentenrichtung ist in diesem Fall normal zu e . Man sucht also jenen Punkt $V^{\varepsilon 0}$ von $m^{\varepsilon 0}$ auf, dessen Tangente normal zu e ist, unterwirft ihn der Kollineation $\mathfrak{R}^{-1}$ und erhält den Umrisspunkt V^c von m^c .

JOSEF P. TSCHUPIK, Graz

Netzprojektion eines Tetraeders

Bei einer *Netzprojektion* des P_3 auf eine Bildebene werden als Abbildungsmittel die ∞^2 Geraden eines Strahlnetzes benutzt. Durch spezielle Wahl der Leitgeraden dieses abbildenden Netzes kann erreicht werden, dass die Bilder von Raumgeraden entweder Kreise oder Parabeln mit fester Achsenrichtung sind; es handelt sich dann um eine *spezielle elliptische* bzw. eine *spezielle parabolische Netzprojektion*. Die bekannten – z. B. in [9] dargestellten – Beziehungen zwischen der elliptischen Netzprojektion eines Tetraeders und der MIQUELSchen *Kreisfigur* werden durch Heranziehung einer speziellen parabolischen Netzprojektion zu Aussagen über gewisse *Parabelfiguren* der Ebene erweitert. Dies erscheint aus zwei Gründen mitteilenswert: Einmal wird ein weiteres Beispiel dafür gegeben, wie Aussagen über ebene Figuren durch räumliche Betrachtungen gewonnen werden können. Zum anderen werden durch das gleiche Prinzip, nämlich verschiedene Netzprojektionen, gleichberechtigt nebeneinander stehende Sachverhalte in der Bildebene erhalten, die sich durch rein planimetrische Überlegungen nicht ohne weiteres ineinander überführen zu lassen scheinen. – In den ersten drei Abschnitten werden einige benötigte Eigenschaften der Netzprojektion bereitgestellt.

1. Die Netzprojektion [1–4] ist eine auf J. STEINER zurückgehende *Abbildung des dreidimensionalen projektiven Raumes P_3 auf eine Bildebene π* , bei der als Abbildungsmittel die Geraden eines Strahlnetzes $\mathfrak{N}$, also einer linearen Strahlkongruenz verwendet werden. Je nach der Art des abbildenden Netzes soll auch die Netzprojektion *hyperbolisch*, *elliptisch* oder *parabolisch* heißen; die Bildebene π enthalte keine Leitgerade von $\mathfrak{N}$. Das Bild P' bzw. ε' eines Punktes P bzw. einer Ebene ε wird erklärt als der Schnittpunkt von π mit der mit P bzw. ε inzidierenden Netzgeraden n_P bzw. n_ε . Das Bild g' einer Geraden g ist die Gesamtheit der Spurpunkte der die Gerade g treffenden Netzgeraden. Da diese Netzgeraden einen Regulus $\mathfrak{R}_g$ bilden, ist g' i. allg. ein Kegelschnitt durch die beiden Spurpunkte der Leitgeraden von $\mathfrak{N}$ in π , die im parabolischen Fall durch ein Linienelement zu ersetzen sind.

Satz 1. *Jeder Punkt von π ist gleichzeitig Bildpunkt der ∞^1 auf der durch ihn gehenden Netzgeraden liegenden Punkte und der ∞^1 durch diese Netzgerade gehenden Ebenen. Jeder durch die Spurpunkte der Leitgeraden von $\mathfrak{N}$ gehende Kegelschnitt von π ist Bild der ∞^1 -Geraden, die zu dem $\mathfrak{N}$ angehörenden Regulus durch diesen Kegelschnitt konjugiert sind.*