

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1971)
Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ungelöste Probleme

Nr. 53. Nachfolgend bezeichne K eine offene oder geschlossene räumliche Kurve, d. h. ein topologisches Bild einer abgeschlossenen Strecke oder einer Kreislinie im gewöhnlichen dreidimensionalen euklidischen Raum. Wir wollen sagen, dass K die Eigenschaft (i) aufweist, wenn sie mit jedem Translat K' , das mit K zwei verschiedene Punkte gemeinsam hat, zusammenfällt. Zeigt t einen Translationsvektor an, so kann dies auch so ausgedrückt werden: Die Kurve K besitzt die Eigenschaft (i), wenn die Aussage

$$\text{card} [(K + t) \cap K] > 1 \Rightarrow t = 0$$

für alle Translationen t gültig ist. Beispielsweise kommt einem Kreisbogen genau dann die Eigenschaft (i) zu, wenn er nicht grösser als ein Halbkreis ist. Es ist leicht zu erkennen, dass eine Raumkurve K genau dann die Eigenschaft (i) aufweist, wenn man ihr nicht ein Parallelogramm mit vier Seiten positiver Länge einbeschreiben kann¹⁾.

Während es recht leicht fällt, offene Kurven der Eigenschaft (i) aufzuzeigen, scheint es schwierig zu sein, geschlossene Kurven dieser Art zu finden, und es ist uns nicht bekannt, ob solche überhaupt existieren. Wir fragen also: *Gibt es eine geschlossene Raumkurve K mit der Eigenschaft (i)?* Sollte dies nicht zutreffen, so würde der folgende Satz gültig sein: *Jeder geschlossenen Raumkurve K lässt sich ein Parallelogramm mit vier Seiten positiver Länge einbeschreiben (?).* Hier drängt sich noch die Frage auf, ob sogar die etwas schärfere Aussage richtig wäre, wonach jeder geschlossenen Raumkurve K ein nicht entartetes Parallelogramm, dessen Ecken nicht kollinear liegen, einbeschrieben werden kann²⁾. H. Hadwiger

Kleine Mitteilungen

Über Scheiben mit richtungsinvarianter Packungsdichte

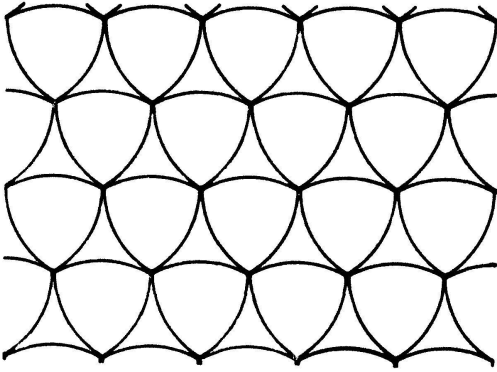
Im Schloss von Blois befindet sich ein Wandornament, das nach Figur 1 angeordnete Wappen darstellt. Diese Figur entsteht, wenn man in einem regulären Dreiecksmosaik die zu einem Dreieck parallel orientierten Dreiecke zu Reuleaux-Dreiecken aufbläst. Es lässt sich fragen, ob hier die Wappen unter der Bedingung paralleler Orientierung am dichtesten gepackt sind.

Nach einem allgemeinen Satz von Rogers [1] können wir uns auf Gitterpackungen beschränken. Sind die Dreiecke, aus denen wir die Wappen erzeugt haben, überhaupt nicht aufgeblasen, so bilden sie sicher keine dichteste Gitterpackung. Jetzt ist nämlich

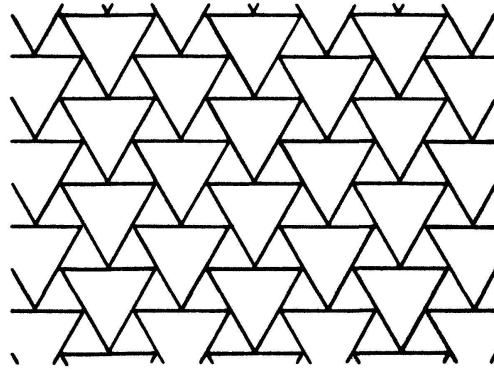
¹⁾ Hierbei sind auch entartete Parallelogramme mit vier Ecken, die auf einer Geraden liegen, zugelassen.

²⁾ In dieser Form wurde die Aufgabe im Rahmen des Mathematik-Wettbewerbes Bern-Zürich, Serie 1, A4 (1970) erfolglos gestellt.

die Dreiecksdichte $1/2$, während die Dichte der dichtesten Gitterpackung von Dreiecken $2/3$ beträgt (Fig. 2, s. [2]). Im anderen extremalen Fall, wenn nämlich die Dreiecke zu regulären Sechsecken aufgeblasen sind, bilden sie offensichtlich eine dichteste Packung der Dichte 1. Sind also die Reuleaux-Dreiecke genügend stark aufgeblasene



Figur 1.



Figur 2.

Dreiecke, um in der betrachteten Anordnung eine dichteste Gitterpackung zu bilden? Diese Frage, die sich von einem allgemeineren Gesichtspunkt aus sehr leicht beantworten lässt, führt uns zu einem netten Problem, das wir in dieser Mitteilung besprechen wollen.

Es sei s eine konvexe Scheibe und a ein in eine vorgegebene Richtung weisender Vektor, für den s und ihr um a verschobenes Bild $s + a$ einen gemeinsamen Randpunkt, aber keinen gemeinsamen inneren Punkt aufweisen. Ferner sei b ein zweiter Vektor, für den $s + b$ sowohl mit s wie mit $s + a$ je einen gemeinsamen Randpunkt, aber keinen gemeinsamen inneren Punkt besitzt. Dann bilden die Scheiben $s + m a + n b$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) eine zu der Richtung von a gehörige dichteste Gitterpackung. Ist die Dichte dieser Packung von der Richtung unabhängig, so sagen wir, dass die Packungsdichte der Scheiben *richtungsinvariant* ist. Wir behaupten, dass jede Scheibe konstanter Breite diese Eigenschaft hat.

Ist nämlich s eine Scheibe der konstanten Breite 1, so ist der Abstand der beiden zu a senkrechten Stützgeraden von s gleich 1. Zu diesen Stützgeraden gehört genau je ein Stützpunkt A und B , und da die Strecke AB ein Durchmesser von s ist, ist sie zu den Stützgeraden senkrecht. Deshalb ist $a = \overrightarrow{AB}$ oder $a = -\overrightarrow{AB}$, also $|a| = 1$. Aus denselben Gründen haben wir $|b| = 1$ und $|b - a| = 1$. Darum besteht das durch a und b aufgespannte Grundparallelogramm aus zwei gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge 1. Sein Flächeninhalt ist $\sqrt{3}/2$ und die Dichte des entsprechenden Scheibengitters $2f/\sqrt{3}$, wo f den Inhalt von s bedeutet.

Die in Figur 1 dargestellten Wappen bilden also eine dichteste Gitterpackung. Dabei ist die Dichte, nämlich $(\pi/\sqrt{3}) - 1 \approx 0,82$, richtungsinvariant. Es handelt sich also um einen Grenzfall: Sind die Dreiecke um beliebig weniger aufgeblasen als die Reuleaux-Dreiecke, so bilden sie keine dichteste Gitterpackung.

Ein weiteres Beispiel für eine Scheibe richtungsinvarianter Packungsdichte ist das Quadrat. Da ferner eine Affinität eine Gitterpackung in eine andere überführt und die Dichte unverändert lässt, sind mit einer Scheibe richtungsinvarianter Packungs-

dichte auch ihre affinen Bilder von derselben Eigenschaft. Unser Problem ist nun die vollständige Aufzählung der Scheiben richtungsinvarianter Packungsdichte. Vor allem erhebt sich die Frage: Gibt es ausser den Scheiben konstanter Breite und dem Quadrat, sowie den affinen Bildern dieser Scheiben weitere Scheiben mit richtungsinvarianter Packungsdichte? Meines Wissens ist diese Frage noch nicht beantwortet.

L. Fejes Tóth, Budapest

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. A. ROGERS, *The Closest Packing of Convex Two-dimensional Domains*, Acta math. 86, 309–321 (1951).
 [2] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, (Springer, Berlin 1953).

Eine Bemerkung zur Diophantischen Analysis

Auf S. 207 der kürzlich erschienenen Monographie [1] steht der Satz: Die Gleichung

$$x^4 - 2y^4 = 1 \tag{1}$$

besitzt in Z^1) nur die Lösungen $x = \pm 1, y = 0$. Der Beweis benutzt die Grundeinheiten des Körpers $Q(2^{1/4})$. Er dient als besonders einfaches Beispiel für die p -adische Methode von Skolem in der Theorie der Diophantischen Gleichungen. L. J. Mordell bemerkt dazu, dass solche einfache Beispiele die Ausnahme bilden und dass der Beweis in diesen Fällen vielleicht einfacher mit klassischen Methoden geführt werden könne. Für die Gleichung (1) trifft diese Bemerkung in besonderem Masse zu, wenn man einen fast trivialen Kunstgriff verwendet, der anscheinend in der Literatur nicht oder wenig benutzt wird, obwohl er gelegentlich zur Vereinfachung und Vereinheitlichung von Beweisen beitragen kann. Diesen Kunstgriff, mit dem man (1) sofort auf die klassische, in Z unmögliche²⁾ Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^2, \quad xy \neq 0 \tag{2}$$

zurückführen kann, wollen wir Diskriminanten-Transformation (DT) nennen.

Ist $x_0, y_0 \in Z$ eine Lösung von (1), so hat die quadratische Gleichung

$$x_0^4 t^2 - 2y_0^4 t - 1 = 0$$

in Z die Lösung $t = 1$. Das ist nur möglich, wenn die Diskriminante

$$D = 4(y_0^8 + x_0^4)$$

in Z ein Quadrat ist. Der Vergleich mit (2) zeigt, dass D für $x_0 y_0 \neq 0$ kein Quadrat ist. D ist auch kein Quadrat, wenn man in (1) y^4 durch y^2 ersetzt. Somit hat die Gleichung $x^4 - 2y^2 = 1$ in Z nur triviale Lösungen.

¹⁾ Z ist der Ring der ganzen Zahlen und Q der Körper der rationalen Zahlen.

²⁾ Vgl. [1], S. 16.

Auf dieselbe Weise erhält man mit der DT sofort das Resultat von Thue [2], dass in (1) 2 durch 2^n , $n \in \mathbb{Z}^+$, ersetzt werden kann (für $n \equiv 2 \pmod{4}$ nehme man -1 als Koeffizienten von t).

Wendet man die DT zweimal auf die Gleichung

$$a x^4 + b y^4 = c z^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

an, wobei das Glied auf der rechten Seite der Koeffizient von t wird, so erhält man die neue Gleichung

$$x^4 + a b c^2 y^4 = z^2. \quad (4)$$

(3) hat keine nichttrivialen Lösungen in \mathbb{Z} , wenn $a b c^2$ zur Menge M der d aus \mathbb{Z} gehört, für die die Gleichung

$$x^4 + d y^4 = z^2, \quad y \neq 0 \quad (5)$$

in \mathbb{Z} unlösbar ist. Ersetzt man in (5) d durch $-4d$ und wendet die DT an, so ergibt sich sofort, dass mit d auch $-4d$ zur Menge M gehört³⁾. M enthält u. a. folgende Zahlen⁴⁾, wobei p eine Primzahl bedeutet:

$$d = \pm 1, \quad d = 2,$$

$$d = p, \quad p \equiv 7, 11 \pmod{16},$$

$$d = -p, \quad p \equiv \pm 3, -5 \pmod{16},$$

$$d = 2p, \quad p \equiv \pm 3 \pmod{8}.$$

Für ein $d \neq p$ aus M ergeben sich aus (4) mindestens zwei Gleichungen (3), die in \mathbb{Z} keine nichttrivialen Lösungen haben. Z. B. hat man für $d = -p$ die beiden Möglichkeiten $a = 1, b = -p, c = \pm 1$.

Wendet man die DT zweimal auf die Gleichung

$$a x^3 + b x = c y^2, \quad y \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

an, wobei $c y^2$ als Koeffizient von t genommen wird, so ergibt sich wieder (4). Man überzeugt sich sofort, dass die Lösbarkeit von (4) in \mathbb{Z} eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (6) in \mathbb{Q} ist. Besonderes Interesse hat in der Literatur der Fall $a = c = 1, b < 0$ gefunden⁵⁾.

Zum Schluss soll noch an einem Beispiel gezeigt werden, dass aus einer unmöglichen Gleichung durch die DT eine lösbare Gleichung entstehen kann: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ geht über in $x^4 - 4y^2 = z^2$ mit der Lösung $x = 5, y = 12, z = 7$. E. Trost

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. J. MORDELL, *Diophantine Equations* (London 1969).
 [2] A. THUE, Arch. Math. Naturv. 25/3 (1903).

³⁾ Mordell folgert diese Tatsache in [1], S. 23, aus einem weitergehenden Satz.

⁴⁾ Vgl. dazu [1], S. 23–24. Die Zugehörigkeit der angeführten Zahlen zu M kann elementar mit der Methode der «Descente infinie» bewiesen werden.

⁵⁾ Vgl. [1], S. 146–147.