

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1971)  
**Heft:** 4

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilungen

### Transformationen von Polyedern in Polyederketten.<sup>1)</sup>

Werde mit  $Q^{(1)}$  ein begrenztes Polyeder bezeichnet und kann  $Q^{(1)}$  in endlich viele Teilpolyeder  $Q_i^{(1)}$  zerlegt werden, die durch Bewegungen ein Polyeder  $Q^{(2)}$  entstehen lassen, so heisse das Polyeder  $Q_i^{(1)}$  mit dem Polyeder  $Q^{(2)}$  zerlegungsgleich.

Sätze über die Zerlegungsgleichheit von Polyedern beziehen sich in der Regel auf die Eigenschaften der Anfangs- und Endpolyeder. Den während einer Transformation auszuführenden Bewegungen der Teilpolyeder werden indessen wenig Beachtung geschenkt. Durchwegs wird die volle Bewegungsgruppe in Betracht gezogen, oder auch, wie z. B. in Sätzen von Hadwiger, daraus nur die Gruppe der Translationen. Dabei werden jedoch die Teilpolyeder einzeln bewegt; zwischen Anfangs- und Endpolyeder treten keine bemerkenswerten Zustände auf.

Meine Untersuchungen zum Problem der Polyederzerlegungen haben die kinematischen Gesetzmässigkeiten bei Lagenänderungen der Teilpolyeder  $Q_i$  sowie deren Zustände als Anfangs-, «Zwischen»- oder Endpolyeder während einer Transformation zum Inhalt. Es werden jene mehrparametrischen Bewegungsvorgänge betrachtet, die entstehen, wenn die Teilpolyeder  $Q_i$  durch Gelenkwerke  $g_i$  in Systemen  $\Sigma Q_i$  zusammenhängen. Eingeführt werden: Eckengelenkwerke, bei denen zwei Polyeder durch einen Eckpunkt verbunden sind, und Kantengelenkwerke, bei denen zwei Polyeder eine gemeinsame Kante haben, um die sie schwenken können. Dadurch werden kinematische offene oder geschlossene Teilpolyederketten gebildet<sup>2)</sup>.

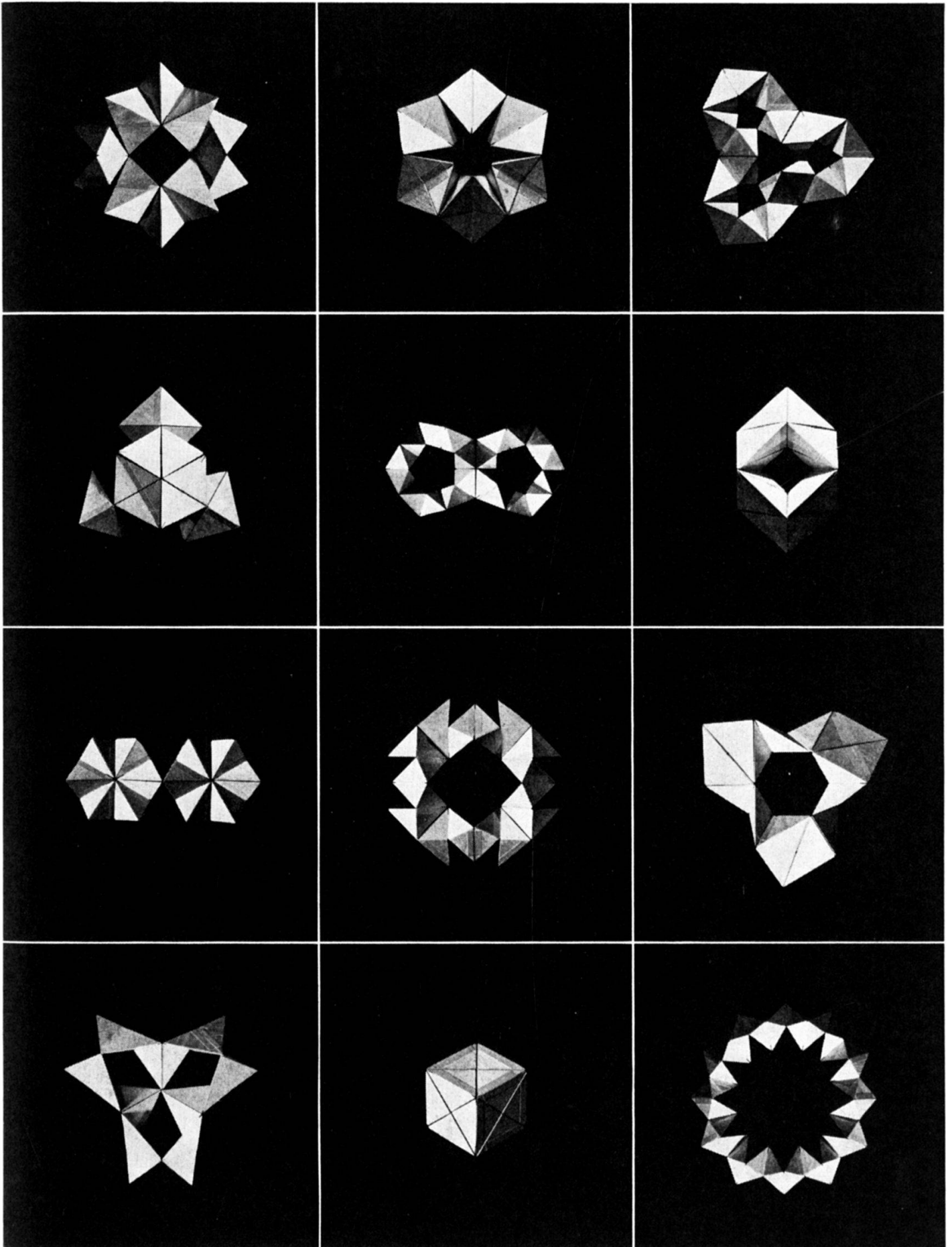
Diese Ketten stellen eine Reihe von meist noch ungelösten Problemen wie z. B.: Lässt sich jedes Polyeder in eine geschlossene Kette transformieren? Falls mehrere geschlossene Ketten als Transformationen eines Polyeders existieren, welche gemeinsamen Eigenschaften haben sie? Welche Ketten existieren zwischen zwei gegebenen zerlegungsgleichen Polyedern?

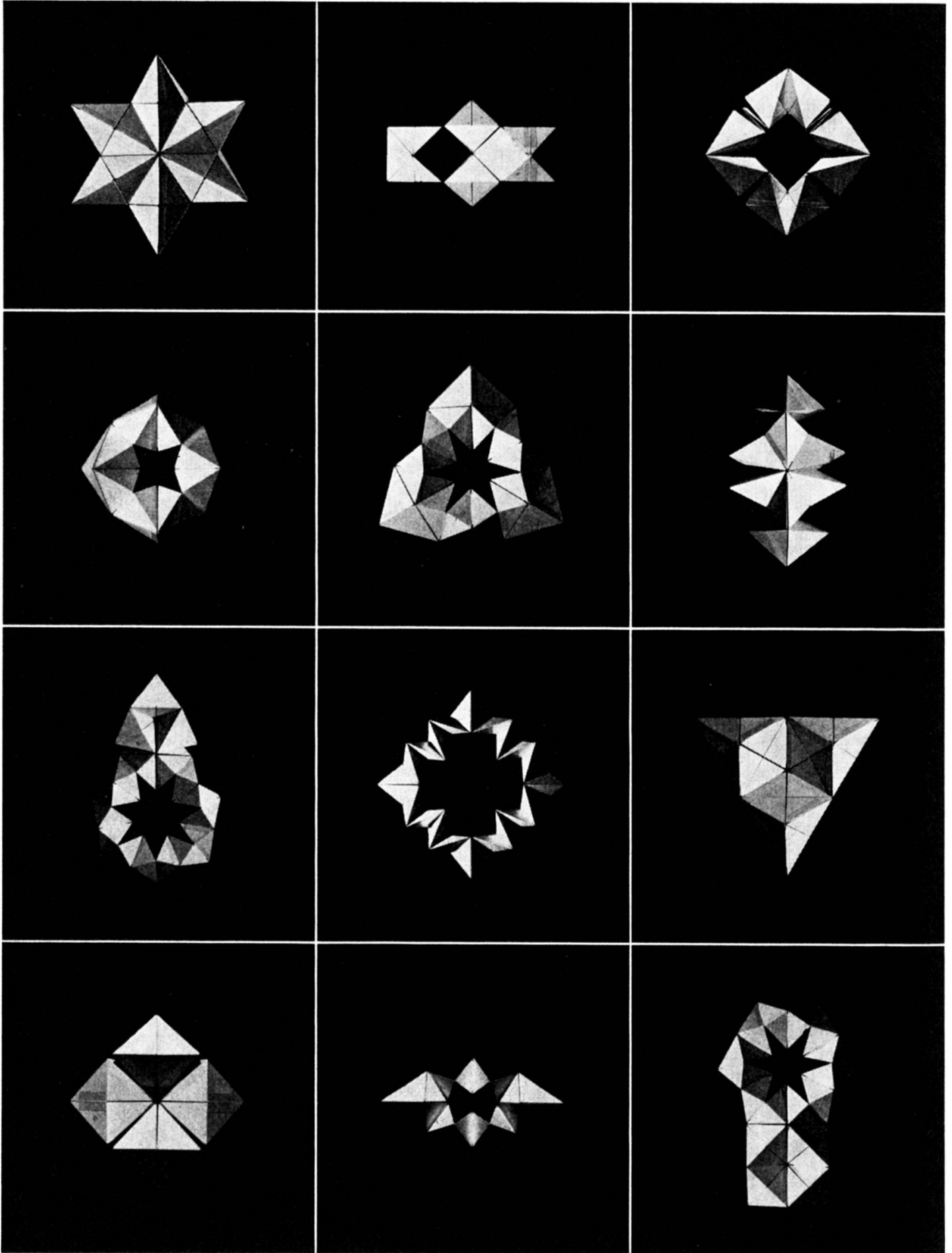
Zur Einführung sei dazu hier nun der einfachste Satz gegeben: Alle regulären konvexen Polyeder lassen sich in geschlossene Polyederketten zerlegen, deren Glieder jeweils paarweise kongruente Polyeder sind.

Der Beweis sei am Beispiel des Würfels gegeben: Die sechs Ebenen durch das Zentrum  $M$  entlang den Diagonalen der Flächen  $f_1, f_2, \dots, f_6$  teilen das Hexaeder in 24 kongruente Teilpolyeder (Tetraeder)  $T_1, T_2, \dots, T_{24}$  mit den Kantenmassen  $1, 1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2$ . Wird nun ein Kantenverbund derart hergestellt, dass die Tetraederkanten  $z_3$  ( $\sqrt{2}/2$ ) von  $T_1$  mit  $z_3$  von  $T_2$  und die Kanten  $z_4$  ( $\sqrt{3}/2$ ) von  $T_2$  mit  $z_4$  von  $T_3$  usw. bis zu den Kanten  $z_4$  der  $T_{24}$  und  $T_1$  schwenkbar gelenkig verbunden werden, so erhalten wir eine 24-gliedrige geschlossene Teilpolyederkette  $K_1$ .

<sup>1)</sup> Clahsenske geschlossene,  $n$ -gliedrig-kongruente, kinematische Polyederketten, Urheberrecht und Copyright, int. mod. dep., Pat. und Gbm. angemeldet.

<sup>2)</sup> Die Anregungen zu meinen die Kinematik beinhaltenden Arbeiten über Polyedertransformationen empfang ich durch die bereits vor 40 Jahren begonnenen Erforschungen des zwangsläufig umstülpbaren Würfelgürtels von Paul Schatz aus Dornach.





Werden andererseits die Kanten  $z_1$  (1) von  $T_1$  mit  $z_1$  von  $T_2$ , und  $z_2$  (1/2) von  $T_2$  mit  $z_2$  von  $T_3$  usw. miteinander verbunden, so entsteht eine ebenfalls geschlossene Kette  $K_2$ . Bringen wir die gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke der  $T_1$  bis  $T_{24}$  zur Deckung, so teilt die Ebene durch die Kanten  $z_2$  und die Halbierungspunkte  $h$  der Kanten  $z_1$  die Kette  $K_2$  in zwei kongruente geschlossene Teiltetraederketten  $K_3$  und  $K_4$ . Beide Ketten lassen sich zu einer einzigen 48-gliedrigen geschlossenen Kette  $K_5$  verknüpfen. Bringen wir nun die gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke irgend zweier kongruenter 24-gliedriger Ketten  $K_3$  zur Deckung, so lässt sich eine geschlossene Kette  $K_6$  bilden, die zerlegungsgleich mit einem Rhombendodekaeder ist.

Stehen zur räumlich-kinematischen Manipulation im Kantenverbund gelenkige, geschlossene Teilpolyederketten in Modellen zur Verfügung, so lassen sich, während Anfangspolyeder in Endpolyeder übergeführt werden, endliche «Zwischenpolyederzustände» verfolgen und wahrscheinliche oder unerwartete, oft ästhetisch besonders interessante Bewegungen beobachten und Konfigurationen feststellen, die selbstverständlich alle mit dem Anfangspolyeder zerlegungsgleich sind. Einen Ausschnitt aus der Vielfalt der Konfigurationen der Kette  $K_1$  zeigen die Fotoreproduktionen der Doppelseite.

Konzept und Imagination des Manipulierenden sind es überlassen, die Ketten beliebig zu transformieren. Die Polyederketten könnten nicht nur zum Studium der Zerlegungsgleichheit Hilfsmodelle darstellen, sondern auch Einblicke interpretativer Art in den nahezu unbegrenzten Reichtum der Natur- oder Kunstformen gewähren. Besonders erwähnenswert sei dazu, dass die interessantesten Teilpolyederlagerungen als Ketten in Zerlegungspolyedern doppel-spiralartigen Anordnungen unterliegen.

Peer Clahsen, Zürich

## Aufgaben

**Aufgabe 626.** Es seien  $ABC$  ein Dreieck mit den Seitenlängen  $a \geq b \geq c$  (die Seite der Länge  $a$  liege dem Eckpunkt  $A$  gegenüber usw.) und  $A', B', C'$  bzw.  $A'', B'', C''$  die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden durch  $A, B, C$  mit den Gegenseiten bzw. mit der Umkreislinie von  $ABC$ . Man beweise: 1)  $A'A'' \geq B'B'' \geq C'C''$ ; Gleichheit genau dann, wenn die entsprechenden Seitenlängen gleich sind. 2)  $BB'' \leq AA''$ ,  $BB'' \leq CC''$ ; Gleichheit genau dann, wenn die entsprechenden Seitenlängen gleich sind. 3) Beide Beziehungen  $AA'' < CC''$ ,  $CC'' < AA''$  kommen vor.

P. Erdős, Budapest

*Lösung:* Es bezeichnen  $\alpha, \beta, \gamma$  die Masse der Innenwinkel des Dreiecks  $ABC$  bei  $A, B, C$  und  $R$  den Umkreisradius von  $ABC$ .

1. Durch Betrachtung der Dreiecke  $ACC''$  und  $AC'C''$  ergeben sich die Beziehungen

$$AC'' = 2R \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{und} \quad C'C'' = AC'' \cdot \frac{\sin \gamma/2}{\sin (\alpha + \gamma/2)},$$