**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 26 (1971)

**Heft:** 5

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

# Kleine Mitteilungen

## Antwort auf eine Frage von P. Erdös nach fünf Punkten mit ganzzahligen Abständen

Herr Professor Erdös fragt (z. B. in [7]): Gibt es fünf Punkte in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden und keine vier auf einem Kreis liegen, und deren Entfernungen voneinander alle ganzzahlig sind? – Bekannt ist, dass bei einer unendlichen Punktmenge mit ganzzahligen Distanzen alle Punkte auf einer Geraden liegen müssen [1, 2, 3]. Für jedes $n$ wurden andererseits $n$ Punkte mit ganzzahligen Abständen so konstruiert, dass keine drei auf einer Geraden, aber mindestens $n-1$ auf einem Kreis liegen [4, 5, 6]. – Hier soll eine Klasse von nicht zueinander ähnlichen Fünfecken angegeben werden, die den gefragten Bedingungen genügen.

Mit noch zu wählenden Winkeln $\alpha$ und $\beta$ werden die Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, mit den Koordinaten

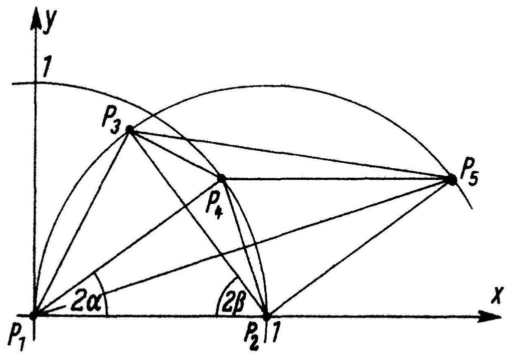
$$x_1 = y_1 = y_2 = 0;\; x_2 = 1;\; x_4 = x_5 - 1 = \cos 2\alpha;\; y_4 = y_5 = \sin 2\alpha;$$
$$x_3 = 1 - \cos 2\beta;\; y_3 = \sin 2\beta \tag{1}$$

betrachtet. $P_1$, $P_2$, $P_4$ und $P_5$ bilden die Eckpunkte eines Rhombus mit der Seitenlänge 1. $P_2$ und $P_4$ bzw. $P_1$, $P_3$ und $P_5$ liegen auf den Einheitskreisen um $P_1$ bzw. um $P_2$. Dann sind die folgenden fünf Entfernungen gleich der Einheit

$$d(P_1, P_2) = d(P_1, P_4) = d(P_2, P_3) = d(P_2, P_5) = d(P_4, P_5) = 1\,. \tag{2}$$

Weitere vier Abstände ergeben sich zu

$$d(P_1, P_3) = 2\sin\beta;\; d(P_1, P_5) = 2\cos\alpha;$$
$$d(P_2, P_4) = 2\sin\alpha;\; d(P_3, P_5) = 2\,(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \tag{3}$$




und sind rational, falls die trigonometrischen Funktionen der Winkel $\alpha$ und $\beta$ rational sind. Dies wird erreicht, wenn $\alpha$ und $\beta$ für beliebige rationale Werte $\xi$ und $\eta$ so bestimmt werden, dass die Beziehungen

$$\sin\alpha = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}\,;\; \cos\alpha = \frac{2\,\xi}{\xi^2 + 1}\,;\; \sin\beta = \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1}\,;\; \cos\beta = \frac{2\,\eta}{\eta^2 + 1} \tag{4}$$

erfüllt sind.

Von den zehn möglichen Abständen bleibt nun nur noch die Rationalität von $d = d(P_3, P_4)$ fraglich. Es gilt

$$d^2 = (\cos 2\alpha + \cos 2\beta - 1)^2 + (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)^2 = 1 - 8\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha + \beta)\,, \tag{5}$$

und mit (4) folgt

$$d^2 - 1 = 8\,\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}\,\frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1}\,\frac{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) - 4\,\xi\,\eta}{(\xi^2 + 1)(\eta^2 + 1)}\,. \tag{6}$$

Hieraus ergeben sich mit $\zeta \neq 0$ die beiden Gleichungen

$$d + 1 = \frac{8}{\zeta}\,\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}\,\frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1} \quad \text{und} \quad d - 1 = \zeta\,\frac{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) - 4\,\xi\,\eta}{(\xi^2 + 1)(\eta^2 + 1)}\,, \tag{7}$$

aus denen durch Addition $d$ rational bestimmt ist, wenn die durch Subtraktion entstehende diophantische Gleichung

$$2\,\zeta\,(\xi^2+1)\,(\eta^2+1) = (8-\zeta^2)\,(\xi^2-1)\,(\eta^2-1) + 4\,\zeta^2\,\xi\,\eta \tag{8}$$

in rationalen Zahlen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gelöst werden kann.

Mit dem auszuschliessenden Wert $\eta = 1$ ($P_1$, $P_2$, $P_3$ wären kollinear) und mit einem rationalen Parameter $q$ gilt (8) für

$$\xi = q \quad \text{und} \quad \zeta = q + 1/q\,. \tag{9}$$

Ebenfalls mit (9) besitzt (8) für $\eta$ noch die zweite, nicht triviale Lösung

$$\eta = -\frac{F(-q)}{F(q)}\,, \qquad F(q) = q^6 + 2\,q^5 - 7\,q^4 + 4\,q^3 + 7\,q^2 + 2\,q - 1\,. \tag{10}$$

Werden nun (9) und (10) über (4) in (1) eingesetzt, so ergeben sich die Koordinaten

$$x_1 = y_1 = y_2 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_4 = x_5 - 1 = \frac{6\,q^2 - q^4 - 1}{(q^2+1)^2}\,;$$

$$y_4 = y_5 = \frac{4\,q\,(q^2-1)}{(q^2+1)^2}\,; \quad x_3 = \frac{32\,q^2\,(q^2-1)^2\,(q^2+1)^4\,(q^4-6\,q^2+1)^2}{\{(q^2-1)^2\,(q^4-6\,q^2+1)^2 + 4\,q^2\,(q^2+1)^4\}^2}\,; \tag{11}$$

$$y_3 = \frac{8\,q\,(q^2-1)\,(q^2+1)^2\,(q^4-6\,q^2+1)\,\{(q^2-1)^2\,(q^4-6\,q^2+1)^2 - 4\,q^2\,(q^2+1)^4\}}{\{(q^2-1)^2\,(q^4-6\,q^2+1)^2 + 4\,q^2\,(q^2+1)^4\}^2}\,.$$

Ersetzt man in (11) $q$ durch $-q$ oder durch $1/q$, so erhält man die an der $x$-Achse gespiegelten Punktmengen.

Die Punkte $P_1$, $P_2$, $P_4$, $P_5$ sind nur kollinear, wenn $q = 0$ oder $q = \pm 1$ gewählt wird; sie liegen genau dann auf einem Kreis, wenn $x_4 = 0$ gilt, was aber für rationales $q$ nicht möglich ist. Da $P_3$ immer auf dem Einheitskreis um $P_2$ liegt, lassen sich die Fälle, in denen $P_3$ mit zwei bzw. drei der übrigen Punkte auf einer Geraden bzw. auf einem Kreis liegt, zu den folgenden Bedingungen für $x_3$ aus (11) zusammenfassen

$$x_3 = 0,\ 2,\ q^2,\ 2 - q^2,\ \frac{2\,(q^4-6\,q^2+1)^2}{(q^2+1)^4}\,,\ \frac{8\,q^2}{(q^2+1)^2}\,,\ \frac{2\,(q^2-1)^2}{(q^2+1)^2}\,. \tag{12}$$

Schliesst man nun von den endlich vielen Lösungen der durch (12) bestimmten Polynome in $q$ die eventuell rationalen Werte aus, so stellen die mit ihrem Hauptnenner multiplizierten Koordinaten aus (11) für jedes andere $q > 1$ fünf Punkte der gewünschten Art dar.

Als Beispiel ergibt $q = 3$ die Punkte $Q_1 = (0, 0)$; $Q_2 = (5^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2, 0)$; $Q_3 = (2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^2, -2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 103)$; $Q_4 = (-7 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2, 2^3 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2)$; $Q_5 = (2 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2, 2^3 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2)$ mit den Abständen $d(Q_1, Q_2) = d(Q_1, Q_4) = d(Q_2, Q_3) = d(Q_2, Q_5) = d(Q_4, Q_5) = 1\,026\,882\,025$; $d(Q_1, Q_3) = 1\,365\,890\,000$; $d(Q_1, Q_5) = 1\,232\,258\,430$; $d(Q_2, Q_4) = 1\,643\,011\,240$; $d(Q_3, Q_4) = 2\,318\,936\,425$; $d(Q_3, Q_5) = 2\,007\,491\,070$.

HEIKO HARBORTH, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. ERDÖS, *Integral Distances*, Bull. Amer. Math. Soc. *51*, 996 (1945).

[2] A. DELACHET, *Contemporary Geometry* (Dover, New York 1962), S. 28–29.

[3] E. TROST, *Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. *6*, 59–60 (1951).

[4] M. ALTWEGG, *Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. *7*, 56–58 (1952).

[5] A. MÜLLER, *Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen*, El. Math. *8*, 37–38 (1953).

[6] F. STEIGER, *Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. *8*, 66–67 (1953).

[7] *Problem Session of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications*, Calgary (Canada). June 1969.

## Eine Verallgemeinerung der Cesàro-Rekursion

Ein Satz aus dem Jahre 1949 möge hier mit dem damaligen Beweis mitgeteilt werden: *Gegeben sind 2 unbestimmte Folgen $a\ b\ c \ldots$ und $A\ B\ C \ldots$. Das wie folgt gebildete Matrizenprodukt ihrer beliebig weit fortgesetzten Teilsummenschemata enthält in jeder Diagonale von links oben nach rechts unten lauter gleiche Elemente:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \cdots & m \\ a & a+b & a+b+c & \cdots & . \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \end{pmatrix} \begin{bmatrix} . & . & . & M \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & 3A+2B+C & A+B+C & C \\ . & 2A+B & A+B & B \\ . & A & A & A \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} S & T & . & . \\ R & S & T & . \\ . & R & S & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

*Beispiel:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Beweis:* Nach der Umbenennung $a\,b\,c \ldots m = a_0\,a_1\,a_2 \ldots a_n$ nebst $A\,B\,C \ldots M = A_0\,A_1\,A_2 \ldots A_n$ handelt es sich um das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} . & \cdots & . \\ \binom{i+0}{0} a_0 & \cdots & \binom{i+n}{n} a_0 + \cdots + \binom{i+0}{0} a_n \\ . & \cdots & . \end{pmatrix} \begin{bmatrix} . & \binom{k+n}{n} A_0 + \cdots + \binom{k+0}{0} A_n & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & \binom{k+0}{0} A_0 & . \end{bmatrix}.$$

Im linken Faktor zählt $i = -1, 0, 1, 2, \ldots$ von oben nach unten; im rechten Faktor zählt $k = -1, 0, 1, 2, \ldots$ von rechts nach links. Das innere Produkt der notierten Zeile $i$ und Spalte $k$ kann als Cauchy-Produkt entwickelt werden:

$$\begin{aligned} & a_0 A_0 \left[\binom{i+0}{0}\binom{k+n}{n} + \cdots + \binom{i+n}{n}\binom{k+0}{0}\right] + \cdots + (a_0 A_n + \cdots + a_n A_0) \\ & \times \left[\binom{i+0}{0}\binom{k+0}{0}\right] = a_0 A_0 \binom{i+k+1+n}{n} + \cdots + (a_0 A_n + \cdots + a_n A_0) \\ & \times \binom{i+k+1+0}{0}. \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit nur von der Summe $i + k$, nicht aber noch einzeln von $i$ und $k$, zeigt die behauptete Konstanz jeder Diagonale der Produktmatrix. – Die benutzte Beziehung

$$\sum_{\substack{\lambda,\mu=0 \\ \lambda+\mu=\nu}}^{\nu} \binom{i+\lambda}{\lambda}\binom{k+\mu}{\mu} = \binom{i+k+1+\nu}{\nu} \quad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots, n$$

folgt durch Koeffizientenvergleich bei $x^\nu$ aus $(1-x)^{-i-1}(1-x)^{-k-1} = (1-x)^{-i-k-2}$, nämlich aus

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{i+\lambda}{\lambda} x^\lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{k+\mu}{\mu} x^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{i+k+1+\nu}{\nu} x^\nu.$$

Die Cesàro-Rekursion (KNOPP, Unendliche Reihen, 4. Aufl., S. 483) ist der Spezialfall $a\,b\,c \ldots = 1\,0\,0 \ldots$, wobei die Hauptdiagonale $\begin{smallmatrix} S & & \\ & S & \\ & & S \end{smallmatrix}$ der Produktmatrix betrachtet wird.

I. PAASCHE, München