

Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen

Autor(en): **Wills, J.M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **28 (1973)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-29451>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 28

Heft 3

Seiten 57-80

10. Mai 1973

Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen

1. Einleitung

Die Anzahl der Gitterpunkte in speziellen konvexen Mengen spielt in der Zahlentheorie eine grosse Rolle. In der Geometrie der Zahlen beschränkt man sich auf zentralsymmetrische konvexe Mengen, in der additiven analytischen Zahlentheorie vor allem auf Kugeln bzw. Ellipsoide um den Nullpunkt. Die dort benutzten, oft tiefliegenden Methoden und Ergebnisse erlauben aber nur zum kleinen Teil eine Übertragung auf beliebige konvexe Mengen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Schranken für die Gitterpunktanzahl beliebiger konvexer Mengen zu finden (Es werden nur Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten betrachtet). Dazu wird zuerst gezeigt, dass gewisse einfache Klassen von Ungleichungen nicht möglich sind. Dann werden mit einer einfachen und allgemeinen Methode einige einfache Ungleichungen für die Gitterpunktanzahl aufgestellt. Bei den interessanteren Ungleichungen wird ausserdem untersucht, inwieweit sie verbessert werden können. Vor den eigentlichen Ergebnissen werden die benötigten Definitionen und bisher bekannte Sätze zusammengestellt.

2. Definitionen

\mathfrak{R}^n sei die Menge der beschränkten konvexen Mengen des n -dimensionalen euklidischen Raumes R^n ($n \geq 1$). Zu einem $K \in \mathfrak{R}^n$ sei \overline{K} der zugehörige konvexe Körper. Ein stetiges Funktional $f = f(K)$ sei durch $f(K) = f(\overline{K})$ definiert (Diese Konvention ist unwesentlich, erweist sich aber als recht praktisch). Zu einem $K \in \mathfrak{R}^n$ sei $V = V(K)$ sein Volumen, $F = F(K)$ seine Oberfläche, $R = R(K)$ bzw. $r = r(K)$ sein Um- bzw. Inkugelradius, $D = D(K)$ sein Durchmesser, $d = d(K)$ seine Dicke, $W_\nu = W_\nu(K)$, $\nu = 0, 1, \dots, n$ seine Minkowskischen Quermassintegrale (also $W_0 = V$, $nW_1 = F$) und $G = G(K)$ die Anzahl der Gitterpunkte aus K . G ist im Gegensatz zu den anderen Funktionalen weder stetig noch bewegungsinvariant noch homogen. Für alle hier definierten Funktionale f ausser G gilt also $f(K) = f(\overline{K})$.

Wie üblich sei α_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel. Es ist $\alpha_n = \pi^{n/2} / \Gamma(n/2 + 1)$, insbesondere $\alpha_1 = 2$. Man setzt noch $\alpha_0 = 1$. Für $\varrho > 0$ sei K_ϱ die äussere Parallelmengung, für $-\varrho \leq \varrho < 0$ die innere Parallelmengung, und $K_\varrho = \emptyset$ für $\varrho < -r$.

(Zu allen Definitionen vgl. [1], [4] oder [5]).

3. Bekannte Sätze

Das bekannteste Ergebnis ist Minkowskis Fundamentalsatz aus der Geometrie der Zahlen (s. z. B. [1]):

$K \in \mathfrak{R}^n$ kompakt, zentralsymmetrisch und $V \geq 2^n \Rightarrow G \geq 3$.

Krupizka [8] zeigt für $K \in \mathfrak{R}^n$ mit $0 \in K$, dessen Rand kein Geradenstück enthält und gewisse weitere Krümmungseigenschaften aufweist:

$$G(\lambda K) = V(\lambda K) + O(\lambda^{n-2n/(n+1)}) \quad (\text{für } \lambda \rightarrow \infty).$$

Beschränkt man sich hier auf Kugeln um den Nullpunkt, so hat man Verallgemeinerungen des klassischen Gaußschen Kreisproblems der additiven Zahlentheorie. Man erhält dann etwas bessere Ergebnisse als Krupizka: Für $n = 2$: $O(\lambda^{15/23})$, für $n = 3$: $O(\lambda^{11/8})$, für $n = 4$: $O(\lambda^2 \log \lambda)$, für $n > 4$: $O(\lambda^{n-2})$, (s. dazu [7]).

Wie schon das Beispiel des Würfels $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\}$ zeigt, gilt der Satz von Krupizka nicht für beliebige K . Denn sei $\lambda = q$ ganz. Dann ist $G(qW) = (2q + 1)^n$, $V(qW) = (2q)^n$, also $G(qW) = V(qW) + O(q^{n-1})$.

Für gitterpunktfreie konvexe Mengen zeigt Hadwiger [6]: $K \in \mathfrak{R}^n$ mit inneren Punkten und $G = 0 \Rightarrow V < F/2$.

Speziell für den R^2 gibt es mehrere Ergebnisse: Nosarzewska [9] zeigt: $K \in \mathfrak{R}^2$ mit inneren Punkten: $-(F/2 + 1) < V - G < F/2$. (Für allgemeinere, nur durch eine rektifizierbare Jordankurve begrenzte ebene Bereiche gilt nach Warmus [12] sogar: $|V - G + 1| \leq cF$ mit $c \approx 0,58$, wenn nur $F > \pi$ ist).

Für ebene gitterpunktfreie konvexe Mengen bei beliebigen Gittern beweist Groemer [3] eine Ungleichung zwischen Affinumfang und Gitterdeterminante.

Zum Schluss sei noch Reeve [10, 11] zitiert, der für die konvexe Hülle H von Gitterpunkten im R^3 und R^4 Ungleichungen zwischen $V(H)$, der Anzahl der Gitterpunkte aus dem Innern von H und der Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von H aufstellt.

4. Ergebnisse

Da alle vorkommenden Ungleichungen noch ziemlich grob sind, wird auf eine Untersuchung, wann $<$ und wann \leq gilt, verzichtet. Satz 1 beantwortet die Frage nach der Existenz von Ungleichungen zwischen G und einem einzigen Funktional f . Sie sind vom Typ $G \leq \varphi(f)$ oder $\psi(f) \leq G$, wobei φ bzw. ψ irgendeine für $0 \leq f < \infty$ definierte reellwertige Funktion ist. Eine Ungleichung $\psi(f) \leq G$ mit $\psi(f) \leq 0$ für $0 \leq f < \infty$ heisst trivial.

Satz 1

a) Es gibt keine Ungleichungen vom Typ

$$G \leq \varphi(r), \quad G \leq \varphi(d), \quad G \leq \varphi(W_\nu) \quad \nu = 0, 1, \dots, n-2, n$$

und keine nichttriviale vom Typ

$$\psi(R) \leq G, \quad \psi(D) \leq G, \quad \psi(W_\nu) \leq G \quad \nu = 0, 1, \dots, n$$

b) Es gibt nichttriviale Ungleichungen vom Typ

$$G \leq \varphi(R), \quad G \leq \varphi(D), \quad G \leq \varphi(W_{n-1})$$

$$\psi(r) \leq G, \quad \psi(d) \leq G.$$

Bemerkung: Satz 2 bringt 3 der 5 möglichen Typen, die allerdings keineswegs bestmöglich sind.

Satz 2

Sei $K \in \mathfrak{R}^n$. Dann gilt

$$2n \left(\frac{F}{V} - 1 \right) \leq G \leq (D + 1)^n \tag{1}$$

$$\psi(r) \leq G \leq \alpha_n \left(R + \frac{\sqrt{n}}{2} \right)^n \text{ mit } \psi(r) = \begin{cases} \alpha_n \left(r - \frac{\sqrt{n}}{2} \right)^n & \text{für } r \geq \frac{\sqrt{n}}{2} \\ 0 & \text{für } r < \frac{\sqrt{n}}{2} \end{cases} \tag{2}$$

Ist $K \in \mathfrak{R}^n$ eigentlich (d. h. $r > 0$), so gilt ausserdem

$$\psi(r, V) \leq G \leq V \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{2r} \right)^n \text{ mit } \psi(r, V) = \begin{cases} V \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{2r} \right)^n & \text{für } r \geq \frac{\sqrt{n}}{2} \\ 0 & \text{für } r < \frac{\sqrt{n}}{2} \end{cases} \tag{3}$$

Zusatz: Notwendig für $G \leq \alpha_n (R + c)^n$ bzw. $G \leq V (1 + c'/r)^n$ ist $c \geq \alpha_n^{1/n}$ bzw. $c' \geq \alpha_n^{-1/n}$. Für $n = 1$ und 2 ist das auch hinreichend.

Bemerkung: Die Ungleichungen (1) sind sehr grob; (2) und (3) sind nur für kugelähnliche K einigermaßen scharf. Immerhin sind (2) und (3) in 1. Näherung optimal, d.h. der Summand mit dem Homogenitätsgrad n ist $\alpha_n R^n$ bzw. $\alpha_n r^n$ bzw. V . Die rechten Seiten von (2) und (3) lassen sich vermutlich auch für $n > 2$ noch zu $\alpha_n (R + c)^n$ bzw. $V (1 + c/r)^n$ mit $c = \alpha_n^{-1/n}$ verbessern.

Aus dem Satz von Krupizka folgt noch, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ϱ_ε so gibt, dass $G \leq \alpha_n (R + \varepsilon)^n$ für $R \geq \varrho_\varepsilon$ und $\alpha_n (r - \varepsilon)^n \leq G$ für $r \geq \varrho_\varepsilon$.

Satz 3

Sei $K \in \mathfrak{R}^n$. Für die Gültigkeit von

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} W_\nu b_\nu \leq G \leq \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} W_\nu c_\nu \tag{4}$$

ist notwendig: $b_0 \leq 1$, $b_1 \leq -1/2$, $b_\nu \leq 0$, $\nu = 2, \dots, n$; $c_\nu \geq \alpha_\nu^{-1}$, $\nu = 0, 1, \dots, n$
 und hinreichend: $b_0 \leq 1$, $b_1 \leq -\sqrt{n}/2$, $b_\nu \leq 0$, $\nu = 2, \dots, n$; $c_\nu \geq (\sqrt{n}/2)^\nu$,
 $\nu = 0, 1, \dots, n$.

Bemerkung: Satz 3 ist zweifellos interessanter als Satz 2. Zwar wird G durch mehr Funktionale abgeschätzt, was die praktische Bedeutung schmälert; aber die Ungleichungen sind linear und geben dazu mehr Informationen über den geometrischen Sachverhalt. Bemerkenswert ist, dass für die Abschätzung von G nach oben alle W_ν benötigt werden, für die Abschätzung von G nach unten aber nur V und F .

Nach Satz 3 gilt also

$$V - \frac{\sqrt{n}}{2} F \leq G \leq \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} W_\nu \left(\frac{\sqrt{n}}{2} \right)^\nu. \quad (5)$$

Vermutlich sind aber die notwendigen Bedingungen zugleich hinreichend, d.h. vermutlich ist:

$$V - \frac{F}{2} \leq G \leq \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{W_\nu}{\alpha_\nu}. \quad (6)$$

Für $n = 1$ sind diese Ungleichungen trivialerweise richtig; für $n = 2$ lauten sie: $V - F/2 \leq G \leq V + F/2 + 1$, das ist das Ergebnis von Nosarzewska. Für $n = 3$ wurde die linke Seite von (6) inzwischen bewiesen [2]. Wie scharf die rechte Seite von (6) ist, zeigt das Beispiel eines Würfels $Q_q = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 \leq x_i \leq q, i = 1, \dots, n\}$ mit q ganz. Hier ist (siehe [4], S. 206 (54)): $W_\nu = \alpha_\nu q^{n-\nu}$, also

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{W_\nu}{\alpha_\nu} = (q + 1)^n = G.$$

5. Beweise

Beweis von Satz 1 a): Zuerst stellen wir fest, dass für jedes $K \in \mathfrak{R}^n$ $W_n = \alpha_n$ ist, also keine Ungleichung $G \leq \varphi(W_n)$ und keine nichttriviale Ungleichung $\psi(W_n) \leq G$ existieren kann.

Zum Beweis, dass die übrigen Ungleichungen nicht möglich sind, werden passende Folgen uneigentlicher konvexer Mengen konstruiert. Die Beschränkung auf uneigentliche Mengen ist dabei unwesentlich.

Sei $L_q = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 \leq x_1 < q, x_i = 0, i = 2, \dots, n\}$ $q = 1, 2, \dots$. Dann ist $r(L_q) = d(L_q) = W_\nu(L_q) = 0$, $\nu = 0, 1, \dots, n - 2$, aber $G(L_q) = q$, und mit $q \rightarrow \infty$ folgt, dass es keine Ungleichungen vom Typ $G \leq \varphi(r)$, $G \leq \varphi(d)$, $G \leq \varphi(W_\nu)$, $\nu = 0, 1, \dots, n - 2$ gibt.

Sei $Q_q = \{(x_1, \dots, x_n) / x_1 = 1/2, 0 \leq x_i < q, i = 2, \dots, n\}$ $q \in [0, \infty)$. Dann ist $D(Q_q) = 2R(Q_q) = \sqrt{n-1} q$ und (siehe [4], S. 216 (55)) $W_\nu(Q_q) = c_\nu q^{n-\nu}$ mit gewissen $c_\nu > 0$ für $\nu = 1, \dots, n - 1$.

Mit q durchlaufen also auch $R(Q_q)$, $D(Q_q)$, $W_\nu(Q_q)$, $\nu = 1, \dots, n - 1$ alle Werte von 0 bis ∞ . Wegen $G(Q_q) = 0$ für jedes q folgt damit notwendig: $\psi(f) \leq 0$ für $0 \leq f < \infty$; d.h. es gibt nur triviale Ungleichungen $\psi(R) \leq G$, $\psi(D) \leq G$, $\psi(W_\nu) \leq G$, $\nu = 1, \dots, n - 1$.

Der analoge Schluss für $W_0 = V$ folgt mit $T_q = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 < x_1 < 1, 0 \leq x_i < q, i = 2, \dots, n\}$. Damit ist a) bewiesen.

b) In Satz 2 werden 3 der 5 Ungleichungen angegeben. Eine Ungleichung für d erhält man aus der für r wegen $2r \leq d \leq 2\sqrt{n} + 1r$ (nach dem Satz von Steinhagen, siehe z.B. [1], S. 79). Eine Ungleichung für W_{n-1} erhält man aus der für D wegen $\alpha_{n-1}/n D \leq W_{n-1} \leq \alpha_n/2 D$ (siehe z.B. [4], S. 212 (44) und S. 219 (65) mit $a = 0$ und $h = D$). Damit ist b) bewiesen.

Lemma 1. Sei $K \in \mathfrak{R}^n$. Dann ist $V(K_{-\sqrt{n}/2}) \leq G(K) \leq V(K_{\sqrt{n}/2})$.

Beweis. Ist $G(K) = 0$, so ist $r(K) \leq \sqrt{n}/2$ und $K_{-\sqrt{n}/2}$ uneigentlich oder leer, also $V(K_{-\sqrt{n}/2}) = 0$. Weiter ist $V(K_{\sqrt{n}/2}) > 0$, also die Behauptung bewiesen. Sei also $G(K) > 0$. Jedem Gitterpunkt $g_i \in K$ werde ein achsenparalleler abgeschlossener Würfel Q_i der Kantenlänge 1 und mit g_i als Mittelpunkt zugeordnet. Es gibt G solcher Q_i . Sei $Q = \bigcup_{i=1}^G Q_i$.

Für jedes $x \in Q_i$ gilt $|x - g_i| \leq \sqrt{n}/2$. Also gilt $K_{-\sqrt{n}/2} \subset Q \subset K_{\sqrt{n}/2}$ und damit $V(K_{-\sqrt{n}/2}) \leq V(Q) \leq V(K_{\sqrt{n}/2})$. Mit $V(Q) = G$ folgt die Behauptung.

Lemma 2. Für $\varrho \in (-\infty, \infty)$ gilt $V(K_\varrho) \geq V(K) + \varrho F(K)$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit von V und F kann angenommen werden: K ist ein Polytop. Weiter seien F_i die $(n-1)$ -dimensionalen Seitenflächen von K und f_i deren $(n-1)$ -dimensionales Volumen. Also $F(K) = \sum_i f_i$.

Der Beweis jetzt in 3 Teilen:

a) $\varrho \geq 0$. Zu einem F_i sei Z_i der Zylinder der Höhe ϱ über der Grundfläche F_i von K nach aussen. Weiter sei $Z = \bigcup_i Z_i$. Dann ist $V(Z) = \varrho F(K)$. Wegen $K_\varrho \supset K \cup Z$ folgt $V(K_\varrho) \geq V(K) + V(Z) = V(K) + \varrho F(K)$.

b) $-\varrho \leq \varrho < 0$. Die Z_i mit der Höhe $|\varrho|$ seien wie in a) erklärt, nur diesmal seien sie ins Innere von K aufgetragen. Wieder sei $Z = \bigcup_i Z_i$. Dann gilt $V(Z) \leq |\varrho| F(K)$, da sich die Z_i wegen der Konvexität von K teilweise überdecken. Andererseits folgt aus der Definition von K : $K_\varrho = K \setminus Z$, also wegen $\varrho < 0$: $V(K_\varrho) \geq V(K) - |\varrho| F(K) = V(K) + \varrho F(K)$.

c) $\varrho < -r$. Wie in b). Hier ist $K_\varrho = \emptyset$, also $V(K_\varrho) = 0$. Weiter ist $K \subset Z$, also $V(K) \leq V(Z) \leq |\varrho| F(K)$, d.h. $0 \geq V(K) + \varrho F(K)$.

Beweis von Satz 2. Ist $r > 0$, dann gilt für die äussere Parallelmenge $V(K_\varrho) \leq (1 + \varrho/r)^n V(K)$ und für die innere: $V(K_{-\varrho}) \geq (1 - \varrho/r)^n V(K)$ (siehe z.B. [5], S. 66), wenn nur $\varrho \leq r$ ist. Mit $\varrho = \sqrt{n}/2$ und Lemma 1 folgen die Ungleichungen (3).

Ist S_r eine Inkugel, S_R die Umkugel von K , so gilt: $K_{\sqrt{n}/2} \subset S_{R+\sqrt{n}/2}$ also $V(K_{\sqrt{n}/2}) \leq \alpha_n (R + \sqrt{n}/2)^n$ und für $r \geq \sqrt{n}/2$ $S_{r-\sqrt{n}/2} \subset K_{-\sqrt{n}/2}$, also $\alpha_n (r - \sqrt{n}/2)^n \leq V(K_{-\sqrt{n}/2})$. Mit Lemma 1 folgen daraus die Ungleichungen (2). Zum Beweis der rechten Seite von (1) beachte man, dass für je zwei Gitterpunkte $g_i, g_j \in K$ gilt: $|g_i - g_j| \leq D$. Also ist das Q aus Lemma 1 enthalten in einem achsenparallelen abgeschlossenen Würfel der Kantenlänge $D + 1$, und es ist $G \leq (D + 1)^n$.

Zum Beweis der linken Seite von (1) wird ein ganz anderer Gedanke herangezogen: Sei $K \in \mathfrak{R}^n$ und $G(K) = \lambda n + \mu$ mit ganzen Zahlen $\lambda \geq 0$ und $0 \leq \mu < n$. Ist $\mu = 0$, so kann K durch (höchstens) λ verschiedene Hyperebenen H_i , die jeweils

(mindestens) n der Gitterpunkte aus K enthalten, sukzessive in $\lambda + 1$ (nichtabgeschlossene) konvexe Mengen K_i mit $G(K_i) = 0$, $i = 1, \dots, \lambda + 1$ zerlegt werden. Ist $\mu > 0$, so wird *i.a.* eine weitere Hyperebene benötigt, und man erhält $\lambda + 2$ verschiedene K_i . Wir fassen beide Fälle zusammen, indem gegebenenfalls $K_{\lambda+2} = \phi$ sei.

Wir haben: $G(K_i) = 0$ für $i = 1, \dots, \lambda + 2$. Weiter gilt: $\sum_{i=1}^{\lambda+2} V(K_i) = V(K)$ und $F(K_i) \leq F(K)$ für $i = 1, \dots, \lambda + 2$. Wegen $G(K_i) = 0$ folgt mit dem Satz von Hadwiger: $V(K_i) \leq (1/2) F(K_i)$.

Also

$$V(K) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\lambda+2} F(K_i) \leq \frac{\lambda + 2}{2} F(K) \leq \left(\frac{G(K)}{2n} + 1 \right) F(K)$$

oder

$$2n \left(\frac{V}{F} - 1 \right) \leq G.$$

Beweis des Zusatzes: Sei S_ε eine Kugel mit Radius $\varepsilon > 0$ um einen Gitterpunkt. Dann folgt die Notwendigkeit der Bedingungen mit $\varepsilon \rightarrow 0$. Die Hinlänglichkeit für $n = 2$ folgt wegen $2\sqrt{\pi} R > \pi R \geq F/2$ bzw. $2V/\sqrt{\pi} r > V/r \geq F/2$ und $V/\pi r^2 \geq 1$ aus $G \leq V + F/2 + 1$ von Nosarzewska.

Beweis von Satz 3 a). Hinlänglichkeit: Sei $K \in \mathfrak{R}^n$. Dann folgt die linke Seite von (4) aus Lemma 1 und Lemma 2 mit $\varrho = -\sqrt{n}/2$.

Für die äussere Parallelmenge K_ϱ gilt nach Steiner: $V(K_\varrho) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} W_\nu \varrho^\nu$ Mit $\varrho = \sqrt{n}/2$ und Lemma 1 folgt die rechte Seite von (4).

Da (4) richtig bleibt, wenn die b_ν verkleinert bzw. die c_ν vergrössert werden, ist die Hinlänglichkeit bewiesen.

b) Notwendigkeit: Wie im Beweis von Satz 1 werden passende konvexe Mengen konstruiert. Sei $j \in [0, n]$ und $P_q^{(j)} = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 \leq x_i < q \text{ für } i = 1, \dots, j, x_i = 0 \text{ für } i = j + 1, \dots, n\}$

Nach [4], S. 216 (55) ist $W_\nu(P_q^{(j)}) = \binom{n+j}{\nu} / \binom{n+j}{\nu} \alpha_\nu q^{n-\nu}$.

Für $\nu < n - j$ ist also $W_\nu(P_q^{(j)}) = 0$.

Für $\nu = n - j$ ist $\binom{n}{\nu} W_\nu(P_q^{(j)}) = \alpha_{n-j} q^j$.

Für $\nu > n - j$ ist $W_\nu(P_q^{(j)}) = 0$ (q^{j-1}).

Wegen $G(P_q^{(j)}) = q^j$ folgt mit $q \rightarrow \infty$: $c_j \geq \alpha_j^{-1}$. Wegen $j \in [0, n]$ beliebig folgt die Behauptung für die rechte Seite von (4).

Sei $j \in [0, n]$ und $Q_q^{(j)} = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 \leq x_i < q \text{ für } i = 1, \dots, j, x_i = 1/2 \text{ für } i = j + 1, \dots, n\}$ Dann ist $W_\nu(Q_q^{(j)}) = W_\nu(P_q^{(j)})$ für $j = 0, 1, \dots, n$.

Für $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ist $G(Q_q^{(j)}) = 0$, also folgt mit $q \rightarrow \infty$: $b_{n-j} \leq 0$ für $j = 0, 1, \dots, n - 1$, d.h. $b_\nu \leq 0$ für $\nu = 1, \dots, n$.

Für $j = n$ ist $V(Q_q^{(n)}) = G(Q_q^{(n)}) = q^n$ und $W_\nu(Q_q^{(n)}) = \alpha_\nu q^{n-\nu}$, $\nu = 1, \dots, n$.

Mit $q \rightarrow \infty$ folgt daraus $b_0 \leq 1$.

Sei $T_q = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 < x_1 < 1, 0 \leq x_i < q, i = 2, \dots, n\}$.

Dann ist $V(T_q) = q^{n-1} F(T_q) = 2q^{n-1} + 2(n-1)q^{n-2}$

und $W_\nu(T_q) = 0$ (q^{n-2}) für $\nu = 2, \dots, n$.

Wegen $G(T_q) = 0$ folgt daraus mit $q \rightarrow \infty$: $2b_1 + b_0 \leq 0$

und mit $b_0 \leq 1$ folgt daraus $b_1 \leq -1/2$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

J. M. Wills, TU Berlin

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BONNESEN-FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper* (New York, Chelsea Publ. Co. 1948).
- [2] J. BOKOWSKI und J. M. WILLS, *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Mengen im R^3* . Erscheint in Acta Math. Hung. Bd. 25.
- [3] H. GROEMER, *Eine Bemerkung über Gitterpunkte in ebenen konvexen Bereichen*, Arch. Math. 10, 62–63 (1949).
- [4] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, (Springer, Berlin 1957).
- [5] H. HADWIGER, *Altes und Neues über konvexe Körper* (Birkhäuser, Basel 1955).
- [6] H. HADWIGER, *Volumen und Oberfläche eines Eikörpers, der keine Gitterpunkte überdeckt*. Math. Z. 116, 191–196 (1970).
- [7] L. K. HUA, *Abschätzungen von Exponentialsummen*, Enzyklopädie Math. Wiss. Bd. I, 2, 29 (Teubner, Leipzig 1959).
- [8] S. KRUPIZKA, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen konvexen Körpern*, Czechoslovak Math. J. 7 (82) 550–552 (1957).
- [9] M. NOSARZEWSKA, *Evaluation de la différence entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle*, Colloq. math. 1, 305–311 (1947).
- [10] J. E. REEVE, *On the Volume of Lattice Polyhedra*. Proc. Lond. math. Soc. (3) 7, 378–395 (1957).
- [11] J. E. REEVE, *A Further Note on the Volume of Lattice Polyhedra*. J. Lond. math. Soc. 34, 57–62 (1959).
- [12] WARMUS, *Kurzmitteilung*. Colloq. math. 1, 45–46 (1947).

Ein isoperimetrisches Problem mit Nebenbedingung

Als Variante des klassischen isoperimetrischen Problems bestimmt Besicovitch in [1] u. a. solche konvexen Bereiche des euklidischen R^2 , welche in einem gegebenen kompakten konvexen Bereich K enthalten sind und bei vorgegebenem Umfang F maximalen Flächeninhalt V liefern. Es zeigt sich, dass dabei die inneren ρ -Hüllen K^ρ , $\rho \in [0, r]$, $r =$ Inkugelradius von K , d. s. die abgeschlossenen Hüllen der Vereinigungen aller in K enthaltenen Kugeln vom Radius ρ , eine ausgezeichnete Rolle spielen.

Wir interessieren uns in dieser Note für folgendes verwandte Problem im R^n , $n \geq 2$:

Ist P ein konvexes Tangentialpolyeder an seine Inkugel S_r , $r > 0$, also $V(P)/F(P) = V(S_r)/F(S_r) = r/n$, so suchen wir das (nach dem Auswahlprinzip sicher existierende) $\max V(\Gamma)/F(\Gamma) \mid \Gamma$ konvex, $S_r \subset \Gamma \subset P$ und die zugehörigen Extremalkörper.

Im R^2 lautet das Ergebnis

$$\frac{V(\Gamma)}{F(\Gamma)} \leq \frac{V(P^{\rho_0})}{F(P^{\rho_0})} = \rho_0 = \frac{[r V(P) - r^2 \sqrt{\pi} V(P)]}{[V(P) - \pi r^2]} \quad (1)$$

und Gleichheit gilt nur für $\Gamma = P^{\rho_0}$.