Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **29 (1974)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.07.2024**

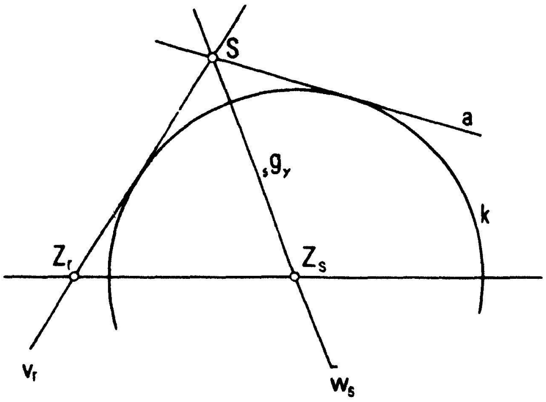


Fig. 7

erzeugt sämtliche Achsenspiegelungen und damit sämtliche Kongruenz-Abbildungen der Ebene.

Σ ist ein reduziertes Erzeugenden-System für die Gruppe $[K; \circ]$.

O. Botsch, Heidelberg

Aufgaben

Aufgabe 689. Man gebe eine Folge $(a_n)_{n \in \mathrm{N}}$ reeller Zahlen so an, dass gilt: Zu jeder positiven reellen Zahl s existiert eine streng monotone Abbildung h_s: $\mathrm{N} \to \mathrm{N}$ derart, dass die Potenzreihe

$$\sum a_{h_s(n)} z^{h_s(n)}$$

genau den Konvergenzradius s besitzt. P. Dierolf, München

Lösung des Aufgabenstellers: Sei $\{r_n : n \in \mathrm{N}\}$ irgendeine Abzählung der positiven rationalen Zahlen. Wir setzen $a_n := (r_n)^n$ $(n \in \mathrm{N})$. Zu $s > 0$ gibt es dann offenbar eine Teilfolge $(r_{k(n)})_{n \in \mathrm{N}}$ mit $\lim r_{k(n)} = 1/s$. Aus der Formel für die Berechnung des Konvergenzradius der Reihe

$$\sum a_{k(n)} z^{k(n)}$$

erhält man:

$$1/R = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[k(n)]{|a_{k(n)}|} = \limsup_{n \to \infty} r_{k(n)} = 1/s\,.$$

Aufgabe 690. Für den halben Umfang s, den Umkreisradius R und den Inkreisradius r eines Dreiecks beweise man

$$2\,s^2 \geq r\,[20\,R - r + \sqrt{3\,(12\,R + r)\,\,(4\,R - 5\,r)}] \geq 32\,Rr - 10\,r^2\,,$$

mit Gleichheit genau für $a = b = c$. A. Bager, Hjørring, Dänemark

Lösung (mit Verschärfung): In der Lösung der Aufgabe 688 (Band 29 (1973), Seite 19, (6)) wurde die Gültigkeit von

$$s^2 \geq 2\,R^2 + 10\,Rr - r^2 - 2\,(R - 2\,r)\sqrt{R\,(R - 2\,r)} \tag{*}$$

nachgewiesen. Diese Ungleichung ist schärfer als die linksseitige Ungleichung der vorliegenden Aufgabe.

Zur Begründung genügt es zu zeigen, dass

$$4R^2 - r^2 - 4(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \geqq r\sqrt{3(12R+r)(4R-5r)} \qquad (1)$$

gilt, mit Gleichheit genau im gleichseitigen Dreieck:
Durch Quadrieren und Zusammenfassen ergibt sich aus (1) die äquivalente Ungleichung

$$(R-2r)(4R^3-4R^2r-3Rr^3-r^3) \geqq (R-2r)(4R^2-r^2)\sqrt{R(R-2r)}, \qquad (2)$$

und aus dieser durch nochmaliges Quadrieren und Zusammenfassen die äquivalente Ungleichung

$$(R-2r)^2(4R+r)^2r^4 \geqq 0. \qquad (3)$$

Die Richtigkeit von (3), mit Gleichheit genau im Fall $R = 2r$, ist evident.
Die rechtsseitige Ungleichung der Aufgabe ergibt sich mit

$$3(12R+r)(4R-5r) = (12R-9r)^2 + 48r(R-2r),$$

woraus wegen $R \geqq 2r$ folgt:

$$r[20R-r+\sqrt{3(12R+r)(4R-5r)}] \geqq r[20R-r+12R-9r] = 32Rr-10r^2.$$

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD

Weitere Lösungen sandten H. Brändli (Zürich), E. Braune (Linz, Österreich) und I. Paasche (München, BRD).

Anmerkungen der Redaktion: I. Paasche gelangt zur gleichen Verschärfung wie O. Reutter (vgl. oben). Für (*) vgl. auch Bottema u.a., Geometric inequalities, Groningen 1968, p. 51, 5.10). Der Aufgabensteller geht aus von der Ungleichung

$$\sum (a-b)^2(a^2+b^2+3c^2-4ab) \geq 0$$

von P. J. Albada (Publ. Elektr. Fak. Beogr., Math.-Phys. Ser., No. 342, Beograd 1971).

Aufgabe 691. Es bezeichnen $\mathbf{C}$ die Menge der komplexen Zahlen und Re a den Realteil der komplexen Zahl a. Für jede der Funktionalgleichungen

$$\mathrm{Re}\,[(f(z)-f(w))^2] = \mathrm{Re}\,[(z-w)^2] \qquad (z, w \in \mathbf{C}), \qquad (1)$$

$$\mathrm{Re}\,[(f(z)-f(w))^2] = |z-w|^2 \qquad (z, w \in \mathbf{C}) \qquad (2)$$

bestimme man die Menge aller Lösungen $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. J. Rätz, Bern

Lösung: kombiniert nach H. Kappus (Rodersdorf SO) und H. Wimmer (Graz, Österreich):

Es sei L die Menge der Lösungen von (1).

$$f \in L \leftrightarrow f = \hat{f} + c, \quad \text{mit} \quad \hat{f} \in L,\ \hat{f}(0) = 0,\ c \in \mathbf{C}.$$

Man braucht somit nur die Menge $\{f \mid f \in L, f(0) = 0\}$ zu bestimmen.

Zerlegt man in Real- und Imaginärteil

$$f(z) = u(z) + iv(z)\,, \quad z = x + iy\,, \quad w = p + iq\,, \quad z_k = x_k + iy_k\,,$$

so erhält man aus (1)

$$[u(z) - u(w)]^2 - [v(z) - v(w)]^2 = (x - p)^2 - (y - q)^2 \tag{3}$$

und weiter aus $f(0) = 0$

$$u(z)^2 - v(z)^2 = x^2 - y^2\,. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) ergibt sich

$$-\,u(z_1)\,u(z) + v(z_1)\,v(z) = -\,xx_1 + yy_1$$

$$-\,u(z_2)\,u(z) + v\,(z_2)\,v(z) = -\,xx_2 + yy_2$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} -\,u(z_1) & v(z_1) \\ -\,u(z_2) & v(z_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\,x_1 & y_1 \\ -\,x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Setzt man $z_1 = 1$, $z_2 = i$ und $z = 1$ bzw. $z = i$, so folgt

$$\begin{pmatrix} -\,u(1) & v(1) \\ -\,u(i) & v(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) & u(i) \\ v(1) & v(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und schliesslich

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1) & u(i) \\ v(1) & v(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

also

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

den Bedingungen

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1\,, \quad a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0\,, \quad -\,a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \tag{6}$$

genügt.

Umgekehrt ist jede Funktion $f(z) = u(z) + iv(z)$, für die (5) und (6) gilt, in L und $f(0) = 0$.

Analoge Überlegungen ergeben für (2)

$$f\,(x + iy) = (a_{11}x + a_{12}y + c_1) + i\,(a_{21}x + a_{22}y + c_2)\,,$$

wobei c_1 und c_2 beliebige reelle Zahlen sind und die a_{ik} den Bedingungen

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1\,, \quad a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0\,, \quad a_{12}^2 - a_{22}^2 = 1 \tag{7}$$

genügen.

Im Falle (1) besteht die Lösungsmenge aus allen affinen Abbildungen $f(z) = Az + f(0)$ von $\mathbf{R}^2$ in sich, wobei die Matrix A der durch

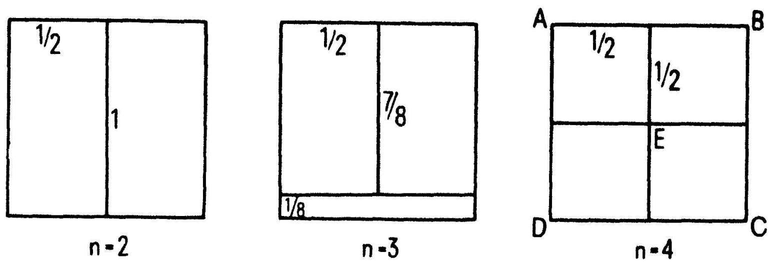
$$\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -t-\dfrac{1}{t} & t-\dfrac{1}{t} \\ -t+\dfrac{1}{t} & t+\dfrac{1}{t} \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R}-\{0\} \right\}$$

erzeugten Untergruppe der vollen linearen Gruppe $GL(2, \mathbf{R})$ angehört, wie man sich beispielsweise unter Heranziehung der Funktionen sinh und cosh leicht überlegt.

Im Falle (2) ist die Lösungsmenge leer: Aus den beiden äusseren Formeln von (7) ergibt sich $|a_{11}| > |a_{21}|$, $|a_{12}| > |a_{22}|$, also $|a_{11}a_{12}| > |a_{21}a_{22}|$, im Widerspruch zur mittleren Formel von (7).

Aufgabe 692. In der euklidischen Ebene soll eine abgeschlossene quadratische Scheibe der Seitenlänge 1 durch n kongruente abgeschlossene Kreisscheiben überdeckt werden. Mir $R(n)$ wird der minimale Kreisradius bezeichnet, der eine solche Überdeckung ermöglicht. Offenbar ist $R(1) = \sqrt{2}/2$. Man berechne $R(2)$, $R(3)$ und $R(4)$.

P. Wilker, Bern



Lösung: Wir zerlegen das Einheitsquadrat gemäss der Figur in Rechtecke, die wir dann durch Kreise vom Radius $R(2) = \sqrt{5}/4$, bzw. $R(3) = \sqrt{65}/16$, bzw. $R(4) = \sqrt{2}/4$ überdecken.

Dass kleinere Kreise nicht zur Überdeckung ausreichen folgt schon aus Ergebnissen von R. K. Guy and J. L. Selfridge (Optimal coverings of the square, Research Paper No. 203, The University of Calgary, September 1973), nach denen die Zerlegungen gemäss der Figur Zerlegungen des Quadrats in beliebige Mengen von möglichst kleinem Durchmesser darstellen.

Für $n = 4$ folgt das Resultat auch einfach daraus, dass einer der 4 Kreise zwei der 5 Punkte A, B, C, D, E überdecken muss.

Für $n = 2$ ist zunächst leicht einzusehen, dass jeder der beiden Kreise zwei benachbarte Ecken, und damit die verbindende Seite, überdecken muss. Soll nun der Durchmesser möglichst klein gehalten werden, so müssen sie die zwei übrigen Seiten je genau zur Hälfte überdecken. Im Fall $n = 3$ muss mindestens einer der 3 Kreise zwei Ecken, und damit die verbindende Seite, und wie man sich leicht überzeugt, ein anliegendes Rechteck überdecken. Für die Überdeckung des übrigbleibenden Rechtecks durch zwei Kreise überlegt man wie für $n = 2$; natürlich wählt man von den zwei möglichen Zerlegungen diejenige in Rechtecke kleineren Durchmessers. Zum Schluss wählt man den ersten Kreis so gross, dass alle Kreise gleich gross ausfallen.

J. Schaer, Calgary, Alberta, Canada

Weitere Lösungen sandten M. Goldberg (Washington, D. C., USA), H. Harborth (Braunschweig, BRD) und H. Warncke (Porto Alegre, Brasil).

Problem 692A. Es gelte die Bezeichnung von Aufgabe 692. Man bestimme $R(5)$.

P. Wilker, Bern

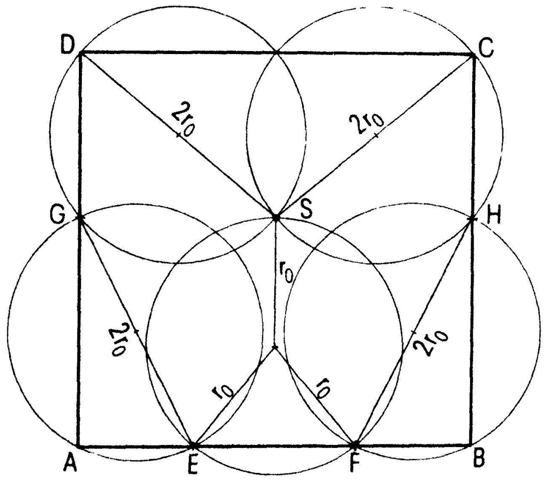


Fig. 1

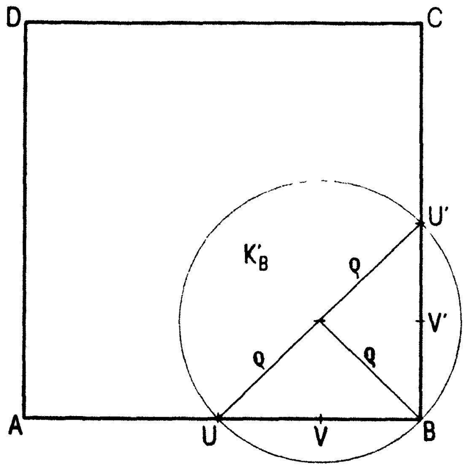


Fig. 2

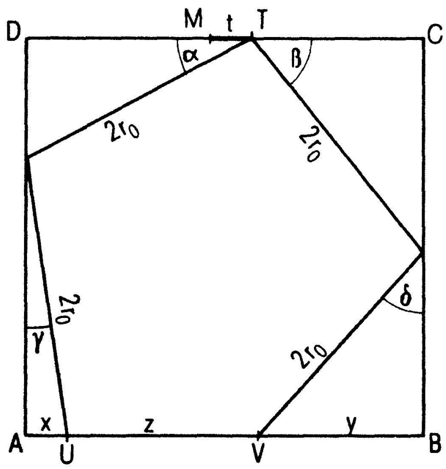


Fig. 3

Lösung: (von M. Goldberg, Washington, D. C., USA; J. Schaer, Calgary, Alberta, Canada und A. Zbinden, Bern, zusammengefasst von A. Zbinden):

In Figur 1 wird eine Überdeckung des Einheitsquadrats durch 5 Kreise vom Radius r_0 gezeigt. r_0 ergibt sich durch elementar-geometrische Überlegungen aus einer algebraischen Gleichung: $r_0 \approx 0.326$.

Sei U die Familie aller Überdeckungen mit 5 Kreisen vom Radius $r \leqslant r_0$. In Verschärfung der Aufgabenstellung wird gezeigt: U enthält bis auf Symmetrien nur die in Figur 1 angegebene Überdeckung.

Die Eckpunkte A, B, C, D werden von verschiedenen Kreisen überdeckt, da $r < 1/2$. Die entsprechenden Kreise werden mit K_A, K_B, K_C, K_D bezeichnet, der fünfte Kreis mit K, die Fläche $K_A \cup K_B \cup K_C \cup K_D$ mit K^*.

Ein Kreis kann höchstens ein Randstück der Länge $2\sqrt{2} \cdot r_0$ des Quadrates überdecken, K^* also wegen $r_0 < \sqrt{2}/4$ nicht den ganzen Quadratrand. Die Seite AB sei von K^* nicht ganz überdeckt. Wir zeigen, dass K^* die restlichen drei Seiten vollständig überdecken muss.

Ein weiteres nicht von K^* überdecktes Randstück müsste auf einer an AB angrenzenden Seite, etwa BC liegen. Seien UV und $U'V'$ (Figur 2) die Randstücke, die dann im Kreis K liegen müssten. Der Radius ϱ des Kreises K_B' in Figur 2 wäre dann kleiner als r_0. Die vier Kreise K_A, K_B', K_C und K_D würden nun den ganzen Quadratrand überdecken, was oben als unmöglich erkannt wurde.

Die folgenden drei Aussagen werden es gestatten, die Behauptung zu beweisen:

I. K überdeckt den Punkt S (Figur 1).

II. K überdeckt die Strecke EF (Figur 1).

III. K_C und K_D überdecken den Punkt S.

Wegen I. und II. ist K eindeutig bestimmt, sein Radius muss r_0 sein. Nach III. sind auch die Kreise K_C und K_D und die Punkte G und H bestimmt, also schliesslich auch K_A und K_B.

Beweis von I.: Es ist $|SA| > 2r_0$, $|SB| > 2r_0$ und $|SC| = |SD| = 2r_0$. In jeder Umgebung von S existieren daher Punkte, die nicht von K^* überdeckt werden. Diese Punkte und damit auch S müssen in K liegen.

Beweis von II.: Auf CD liegt mindestens ein Punkt aus $K_C \cap K_D$. Wegen der Symmetrie des Quadrates dürfen wir voraussetzen, dass ein derartiger Punkt auf MC (Figur 3) existiert. T sei derjenige Punkt aus $K_C \cap K_D$, der auf CM am weitesten von M entfernt ist. Sein Abstand von M betrage t. Wir konstruieren zwei Punkte U, V auf AB gemäss Figur 3. Da T in K_C und BC in $K_B \cup K_C$ liegt, kann K_B höchstens das Stück VB der Länge y von AB überdecken. Analog kann K_A höchstens das Stück AU der Länge x überdecken. Somit muss K mindestens das Stück UV der Länge $z = 1 - x - y$ enthalten. Wegen $t > 0$ ist $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \leqslant \delta$, also

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\delta \geqslant 0\,.$$

Da die Gleichheitszeichen genau für den Fall $t = 0$ gelten, nimmt z seinen minimalen Wert für $t = 0$ an. Aus I. folgt andrerseits, dass K höchstens ein Stück der Länge $|EF|$ von AB überdecken kann. Es folgt $t = 0$, $U = E$, $V = F$ und $r = r_0$.

Beweis von III.: In jeder Umgebung von S liegen Punkte ausserhalb von $K_A \cup K_B \cup K$, wie aus I und II folgt. Wie in I. folgt nun Aussage III.

Einen weiteren Beitrag sandte H. Warncke, Porto Alegre, Brasilien.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Oktober 1974,** wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem...A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 713. Give a proof of

$$c(m, n) = \sum_{\substack{d|n \\ d|m}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d\,,$$

where

$$c(m, n) := \sum_{\substack{1 \le h \le n \\ (h,n)=1}} \exp\left(\frac{2\pi i h m}{n}\right),$$

using only the formula

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n > 1 \end{cases}.$$

D. Suryanarayana, Waltair, India

Aufgabe 714. Es seien ABC ein Dreieck und S ein innerer Punkt von ABC. Die Transversalen AS, BS, CS sollen die Gegenseiten in den Punkten P, Q, R treffen. Es seien ferner

$$u = \frac{\overline{AS}}{\overline{SP}}, \quad v = \frac{\overline{BS}}{\overline{SQ}}, \quad w = \frac{\overline{CS}}{\overline{SR}}, \quad x = \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}}, \quad y = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}, \quad z = \frac{\overline{BR}}{\overline{RA}}.$$

Man zeige, dass jeder der zwanzig 3reihigen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} -u & 1 & 1 & -y & 1 & 0 \\ 1 & -v & 1 & 0 & -z & 1 \\ 1 & 1 & -w & 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

verschwindet und gewinne daraus bekannte Sätze der Elementargeometrie.

I. Paasche, München, BRD

Aufgabe 715. (Même notation que dans Aufgabe 712). a) Démontrer qu'on obtient les lignes des centres des deux groupes de cercles de Steiner d'un quadrilatère complet, en joignant le centre C_M du cercle de Miquel aux points de rencontre M_1, M_2 avec l'axe OM du cercle de centre M et de rayon R_M, puis en abaissant de M les perpendiculaires sur les droites M_1C_M, M_2C_M.

b) Démontrer que la distance entre les points limites de l'un des systèmes de cercles de Steiner est égale à $(2/\mu)\sqrt{R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta}$, c'est-à-dire à $4\sqrt{\mu R_M}$.

J. Quoniam, St-Etienne, France

Aufgabe 716. Bezeichnen α_1, α_2, α_3 die Masse der Innenwinkel eines Dreiecks, so gilt

$$\sum_{i=1}^{3} (\sin 3\alpha_i - \sin 2\alpha_i + \sin \alpha_i) \ge 0$$

mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck.

E. Braune, Linz, Donau, Österreich

Literaturüberschau

Introduction to Algebra. Von R. KOCHENDÖRFFER. 414 Seiten. Wolters-Noordhoff, Groningen 1972.

Dieses Buch ist für Studenten des zweiten Jahres des «undergraduate» Studiums an einer amerikanischen Universität geschrieben und infolgedessen recht elementar gehalten. Trotzdem