

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 29 (1974)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 29.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

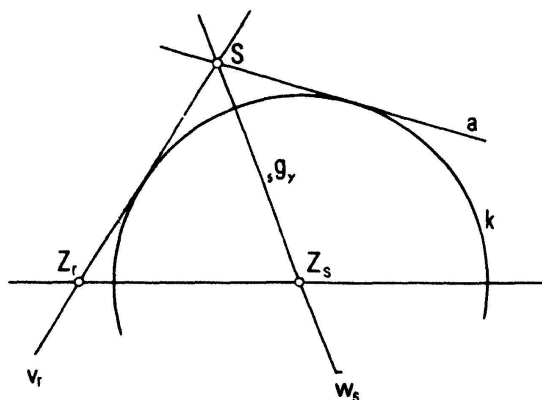


Fig. 7

erzeugt sämtliche Achsenspiegelungen und damit sämtliche Kongruenz-Abbildungen der Ebene.

$\Sigma$  ist ein reduziertes Erzeugenden-System für die Gruppe  $[K; \circ]$ .

O. Botsch, Heidelberg

## Aufgaben

**Aufgabe 689.** Man gebe eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen so an, dass gilt: Zu jeder positiven reellen Zahl  $s$  existiert eine streng monotone Abbildung  $h_s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  derart, dass die Potenzreihe

$$\sum a_{h_s(n)} z^{h_s(n)}$$

genau den Konvergenzradius  $s$  besitzt.

P. Dierolf, München

*Lösung des Aufgabenstellers:* Sei  $\{r_n: n \in \mathbb{N}\}$  irgendeine Abzählung der positiven rationalen Zahlen. Wir setzen  $a_n := (r_n)^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Zu  $s > 0$  gibt es dann offenbar eine Teilfolge  $(r_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim r_{k(n)} = 1/s$ . Aus der Formel für die Berechnung des Konvergenzradius der Reihe

$$\sum a_{k(n)} z^{k(n)}$$

erhält man:

$$1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k(n)]{|a_{k(n)}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} r_{k(n)} = 1/s.$$

**Aufgabe 690.** Für den halben Umfang  $s$ , den Umkreisradius  $R$  und den Inkreisradius  $r$  eines Dreiecks beweise man

$$2s^2 \geq r [20R - r + \sqrt{3(12R + r)(4R - 5r)}] \geq 32Rr - 10r^2,$$

mit Gleichheit genau für  $a = b = c$ .

A. Bager, Hjørring, Dänemark

*Lösung (mit Verschärfung):* In der Lösung der Aufgabe 688 (Band 29 (1973), Seite 19, (6)) wurde die Gültigkeit von

$$s^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \quad (*)$$

nachgewiesen. Diese Ungleichung ist schärfer als die linksseitige Ungleichung der vorliegenden Aufgabe.

Zur Begründung genügt es zu zeigen, dass

$$4 R^2 - r^2 - 4 (R - 2 r) \sqrt{R (R - 2 r)} \geq r \sqrt{3 (12 R + r) (4 R - 5 r)} \quad (1)$$

gilt, mit Gleichheit genau im gleichseitigen Dreieck:

Durch Quadrieren und Zusammenfassen ergibt sich aus (1) die äquivalente Ungleichung

$$(R - 2 r) (4 R^3 - 4 R^2 r - 3 R r^3 - r^3) \geq (R - 2 r) (4 R^2 - r^2) \sqrt{R (R - 2 r)}, \quad (2)$$

und aus dieser durch nochmaliges Quadrieren und Zusammenfassen die äquivalente Ungleichung

$$(R - 2 r)^2 (4 R + r)^2 r^4 \geq 0. \quad (3)$$

Die Richtigkeit von (3), mit Gleichheit genau im Fall  $R = 2 r$ , ist evident.

Die rechtsseitige Ungleichung der Aufgabe ergibt sich mit

$$3 (12 R + r) (4 R - 5 r) = (12 R - 9 r)^2 + 48 r (R - 2 r),$$

woraus wegen  $R \geq 2 r$  folgt:

$$r [20 R - r + \sqrt{3 (12 R + r) (4 R - 5 r)}] \geq r [20 R - r + 12 R - 9 r] = 32 R r - 10 r^2.$$

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD

Weitere Lösungen sandten H. Brändli (Zürich), E. Braune (Linz, Österreich) und I. Paasche (München, BRD).

*Anmerkungen der Redaktion:* I. Paasche gelangt zur gleichen Verschärfung wie O. Reutter (vgl. oben). Für (\*) vgl. auch Bottema u. a., *Geometric inequalities*, Groningen 1968, p. 51, 5.10). Der Aufgabensteller geht aus von der Ungleichung

$$\sum (a - b)^2 (a^2 + b^2 + 3 c^2 - 4 ab) \geq 0$$

von P. J. Albada (Publ. Elektr. Fak. Beogr., Math.-Phys. Ser., No. 342, Beograd 1971).

**Aufgabe 691.** Es bezeichnen  $\mathbf{C}$  die Menge der komplexen Zahlen und  $\operatorname{Re} a$  den Realteil der komplexen Zahl  $a$ . Für jede der Funktionalgleichungen

$$\operatorname{Re} [(f(z) - f(w))^2] = \operatorname{Re} [(z - w)^2] \quad (z, w \in \mathbf{C}), \quad (1)$$

$$\operatorname{Re} [(f(z) - f(w))^2] = |z - w|^2 \quad (z, w \in \mathbf{C}) \quad (2)$$

bestimme man die Menge aller Lösungen  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ .

J. Rätz, Bern

*Lösung:* kombiniert nach H. Kappus (Rodorsdorf SO) und H. Wimmer (Graz, Österreich):

Es sei  $L$  die Menge der Lösungen von (1).

$$f \in L \leftrightarrow f = \hat{f} + c, \quad \text{mit } \hat{f} \in L, \hat{f}(0) = 0, c \in \mathbf{C}.$$

Man braucht somit nur die Menge  $\{f \mid f \in L, f(0) = 0\}$  zu bestimmen.

Zerlegt man in Real- und Imaginärteil

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad z = x + iy, \quad w = p + iq, \quad z_k = x_k + iy_k,$$

so erhält man aus (1)

$$[u(z) - u(w)]^2 - [v(z) - v(w)]^2 = (x - p)^2 - (y - q)^2 \quad (3)$$

und weiter aus  $f(0) = 0$

$$u(z)^2 - v(z)^2 = x^2 - y^2. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) ergibt sich

$$-u(z_1)u(z) + v(z_1)v(z) = -xx_1 + yy_1$$

$$-u(z_2)u(z) + v(z_2)v(z) = -xx_2 + yy_2$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} -u(z_1) & v(z_1) \\ -u(z_2) & v(z_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 & y_1 \\ -x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Setzt man  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = i$  und  $z = 1$  bzw.  $z = i$ , so folgt

$$\begin{pmatrix} -u(1) & v(1) \\ -u(i) & v(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) & u(i) \\ v(1) & v(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und schliesslich

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1) & u(i) \\ v(1) & v(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

also

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (5)$$

den Bedingungen

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0, \quad -a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \quad (6)$$

genügt.

Umgekehrt ist jede Funktion  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , für die (5) und (6) gilt, in  $L$  und  $f(0) = 0$ .

Analoge Überlegungen ergeben für (2)

$$f(x + iy) = (a_{11}x + a_{12}y + c_1) + i(a_{21}x + a_{22}y + c_2),$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  beliebige reelle Zahlen sind und die  $a_{ik}$  den Bedingungen

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0, \quad a_{12}^2 - a_{22}^2 = 1 \tag{7}$$

genügen.

Im Falle (1) besteht die Lösungsmenge aus allen affinen Abbildungen  $f(z) = Az + f(0)$  von  $\mathbf{R}^2$  in sich, wobei die Matrix  $A$  der durch

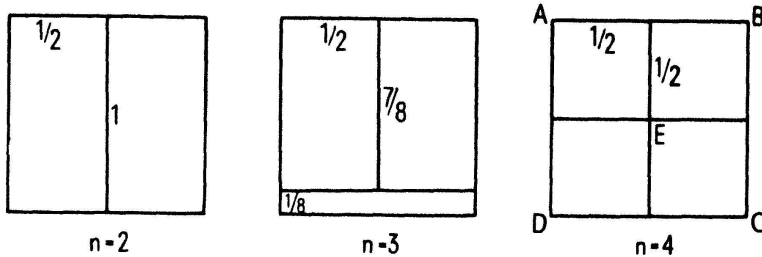
$$\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -t - \frac{1}{t} & t - \frac{1}{t} \\ -t + \frac{1}{t} & t + \frac{1}{t} \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} - \{0\} \right\}$$

erzeugten Untergruppe der vollen linearen Gruppe  $GL(2, \mathbf{R})$  angehört, wie man sich beispielsweise unter Heranziehung der Funktionen  $\sinh$  und  $\cosh$  leicht überlegt.

Im Falle (2) ist die Lösungsmenge leer: Aus den beiden äusseren Formeln von (7) ergibt sich  $|a_{11}| > |a_{21}|$ ,  $|a_{12}| > |a_{22}|$ , also  $|a_{11}a_{12}| > |a_{21}a_{22}|$ , im Widerspruch zur mittleren Formel von (7).

**Aufgabe 692.** In der euklidischen Ebene soll eine abgeschlossene quadratische Scheibe der Seitenlänge 1 durch  $n$  kongruente abgeschlossene Kreisscheiben überdeckt werden. Mit  $R(n)$  wird der minimale Kreisradius bezeichnet, der eine solche Überdeckung ermöglicht. Offenbar ist  $R(1) = \sqrt{2}/2$ . Man berechne  $R(2)$ ,  $R(3)$  und  $R(4)$ .

P. Wilker, Bern



*Lösung:* Wir zerlegen das Einheitsquadrat gemäss der Figur in Rechtecke, die wir dann durch Kreise vom Radius  $R(2) = \sqrt{5}/4$ , bzw.  $R(3) = \sqrt{65}/16$ , bzw.  $R(4) = \sqrt{2}/4$  überdecken.

Dass kleinere Kreise nicht zur Überdeckung ausreichen folgt schon aus Ergebnissen von R. K. Guy and J. L. Selfridge (Optimal coverings of the square, Research Paper No. 203, The University of Calgary, September 1973), nach denen die Zerlegungen gemäss der Figur Zerlegungen des Quadrats in beliebige Mengen von möglichst kleinem Durchmesser darstellen.

Für  $n = 4$  folgt das Resultat auch einfach daraus, dass einer der 4 Kreise zwei der 5 Punkte  $A, B, C, D, E$  überdecken muss.

Für  $n = 2$  ist zunächst leicht einzusehen, dass jeder der beiden Kreise zwei benachbarte Ecken, und damit die verbindende Seite, überdecken muss. Soll nun der Durchmesser möglichst klein gehalten werden, so müssen sie die zwei übrigen Seiten je genau zur Hälfte überdecken. Im Fall  $n = 3$  muss mindestens einer der 3 Kreise zwei Ecken, und damit die verbindende Seite, und wie man sich leicht überzeugt, ein anliegendes Rechteck überdecken. Für die Überdeckung des übrigbleibenden Rechtecks durch zwei Kreise überlegt man wie für  $n = 2$ ; natürlich wählt man von den zwei

möglichen Zerlegungen diejenige in Rechtecke kleineren Durchmessers. Zum Schluss wählt man den ersten Kreis so gross, dass alle Kreise gleich gross ausfallen.

J. Schaer, Calgary, Alberta, Canada

Weitere Lösungen sandten M. Goldberg (Washington, D. C., USA), H. Harborth (Braunschweig, BRD) und H. Warncke (Porto Alegre, Brasil).

**Problem 692A.** Es gelte die Bezeichnung von Aufgabe 692. Man bestimme  $R(5)$ .

P. Wilker, Bern

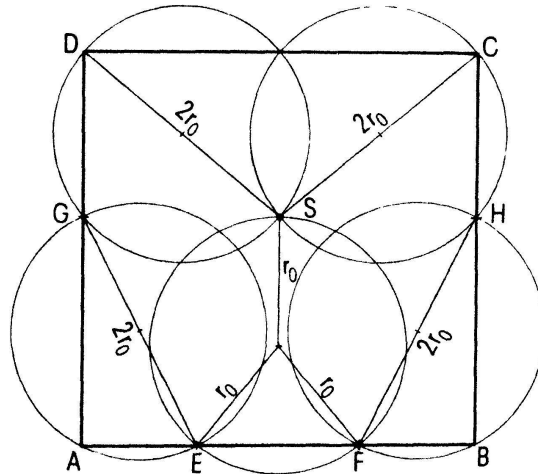


Fig. 1

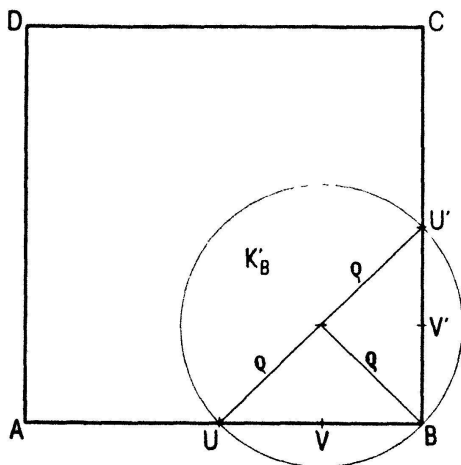


Fig. 2

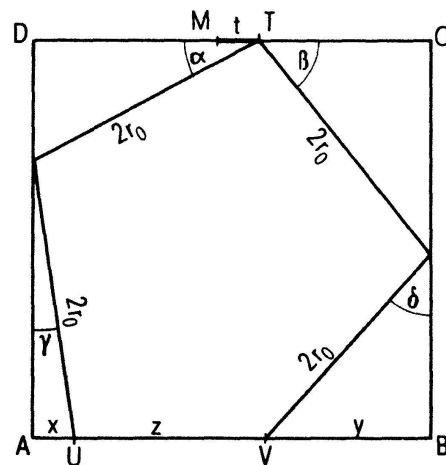


Fig. 3

**Lösung:** (von M. Goldberg, Washington, D. C., USA; J. Schaer, Calgary, Alberta, Canada und A. Zbinden, Bern, zusammengefasst von A. Zbinden):

In Figur 1 wird eine Überdeckung des Einheitsquadrats durch 5 Kreise vom Radius  $r_0$  gezeigt.  $r_0$  ergibt sich durch elementar-geometrische Überlegungen aus einer algebraischen Gleichung:  $r_0 \approx 0.326$ .

Sei  $\mathcal{U}$  die Familie aller Überdeckungen mit 5 Kreisen vom Radius  $r \leq r_0$ . In Verschärfung der Aufgabenstellung wird gezeigt:  $\mathcal{U}$  enthält bis auf Symmetrien nur die in Figur 1 angegebene Überdeckung.

Die Eckpunkte  $A, B, C, D$  werden von verschiedenen Kreisen überdeckt, da  $r < 1/2$ . Die entsprechenden Kreise werden mit  $K_A, K_B, K_C, K_D$  bezeichnet, der fünfte Kreis mit  $K$ , die Fläche  $K_A \cup K_B \cup K_C \cup K_D$  mit  $K^*$ .

Ein Kreis kann höchstens ein Randstück der Länge  $2\sqrt{2} \cdot r_0$  des Quadrates überdecken,  $K^*$  also wegen  $r_0 < \sqrt{2}/4$  nicht den ganzen Quadratrand. Die Seite  $AB$  sei von  $K^*$  nicht ganz überdeckt. Wir zeigen, dass  $K^*$  die restlichen drei Seiten vollständig überdecken muss.

Ein weiteres nicht von  $K^*$  überdecktes Randstück müsste auf einer an  $AB$  angrenzenden Seite, etwa  $BC$  liegen. Seien  $UV$  und  $U'V'$  (Figur 2) die Randstücke, die dann im Kreis  $K$  liegen müssten. Der Radius  $\rho$  des Kreises  $K_B$  in Figur 2 wäre dann kleiner als  $r_0$ . Die vier Kreise  $K_A, K_B, K_C$  und  $K_D$  würden nun den ganzen Quadratrand überdecken, was oben als unmöglich erkannt wurde.

Die folgenden drei Aussagen werden es gestatten, die Behauptung zu beweisen:

- I.  $K$  überdeckt den Punkt  $S$  (Figur 1).
- II.  $K$  überdeckt die Strecke  $EF$  (Figur 1).
- III.  $K_C$  und  $K_D$  überdecken den Punkt  $S$ .

Wegen I. und II. ist  $K$  eindeutig bestimmt, sein Radius muss  $r_0$  sein. Nach III. sind auch die Kreise  $K_C$  und  $K_D$  und die Punkte  $G$  und  $H$  bestimmt, also schliesslich auch  $K_A$  und  $K_B$ .

*Beweis von I.:* Es ist  $|SA| > 2r_0$ ,  $|SB| > 2r_0$  und  $|SC| = |SD| = 2r_0$ . In jeder Umgebung von  $S$  existieren daher Punkte, die nicht von  $K^*$  überdeckt werden. Diese Punkte und damit auch  $S$  müssen in  $K$  liegen.

*Beweis von II.:* Auf  $CD$  liegt mindestens ein Punkt aus  $K_C \cap K_D$ . Wegen der Symmetrie des Quadrates dürfen wir voraussetzen, dass ein derartiger Punkt auf  $MC$  (Figur 3) existiert.  $T$  sei derjenige Punkt aus  $K_C \cap K_D$ , der auf  $CM$  am weitesten von  $M$  entfernt ist. Sein Abstand von  $M$  betrage  $t$ . Wir konstruieren zwei Punkte  $U, V$  auf  $AB$  gemäss Figur 3. Da  $T$  in  $K_C$  und  $BC$  in  $K_B \cup K_C$  liegt, kann  $K_B$  höchstens das Stück  $VB$  der Länge  $y$  von  $AB$  überdecken. Analog kann  $K_A$  höchstens das Stück  $AU$  der Länge  $x$  überdecken. Somit muss  $K$  mindestens das Stück  $UV$  der Länge  $z = 1 - x - y$  enthalten. Wegen  $t > 0$  ist  $\alpha \leq \beta$  und  $\gamma \leq \delta$ , also

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\delta \geq 0.$$

Da die Gleichheitszeichen genau für den Fall  $t = 0$  gelten, nimmt  $z$  seinen minimalen Wert für  $t = 0$  an. Aus I. folgt andererseits, dass  $K$  höchstens ein Stück der Länge  $|EF|$  von  $AB$  überdecken kann. Es folgt  $t = 0$ ,  $U = E$ ,  $V = F$  und  $r = r_0$ .

*Beweis von III.:* In jeder Umgebung von  $S$  liegen Punkte ausserhalb von  $K_A \cup K_B \cup K$ , wie aus I und II folgt. Wie in I. folgt nun Aussage III.

Einen weiteren Beitrag sandte H. Warncke, Porto Alegre, Brasilien.

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Oktober 1974**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem...A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

**Aufgabe 713.** Give a proof of

$$c(m, n) = \sum_{\substack{d|n \\ d|m}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d,$$

where

$$c(m, n) := \sum_{\substack{1 \leq h \leq n \\ (h, n) = 1}} \exp\left(\frac{2\pi i h m}{n}\right),$$

using only the formula

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n > 1 \end{cases}.$$

D. Suryanarayana, Waltair, India

**Aufgabe 714.** Es seien  $ABC$  ein Dreieck und  $S$  ein innerer Punkt von  $ABC$ . Die Transversalen  $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$  sollen die Gegenseiten in den Punkten  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  treffen. Es seien ferner

$$u = \frac{\overline{AS}}{\overline{SP}}, \quad v = \frac{\overline{BS}}{\overline{SQ}}, \quad w = \frac{\overline{CS}}{\overline{SR}}, \quad x = \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}}, \quad y = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}, \quad z = \frac{\overline{BR}}{\overline{RA}}.$$

Man zeige, dass jeder der zwanzig 3reihigen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} -u & 1 & 1 & -y & 1 & 0 \\ 1 & -v & 1 & 0 & -z & 1 \\ 1 & 1 & -w & 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

verschwindet und gewinne daraus bekannte Sätze der Elementargeometrie.

I. Paasche, München, BRD

**Aufgabe 715.** (Même notation que dans Aufgabe 712). a) Démontrer qu'on obtient les lignes des centres des deux groupes de cercles de Steiner d'un quadrilatère complet, en joignant le centre  $C_M$  du cercle de Miquel aux points de rencontre  $M_1, M_2$  avec l'axe  $OM$  du cercle de centre  $M$  et de rayon  $R_M$ , puis en abaissant de  $M$  les perpendiculaires sur les droites  $M_1C_M, M_2C_M$ .

b) Démontrer que la distance entre les points limites de l'un des systèmes de cercles de Steiner est égale à  $(2/\mu)\sqrt{R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta}$ , c'est-à-dire à  $4\sqrt{\mu R_M}$ .

J. Quoniam, St-Etienne, France

**Aufgabe 716.** Bezeichnen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  die Masse der Innenwinkel eines Dreiecks, so gilt

$$\sum_{i=1}^3 (\sin 3\alpha_i - \sin 2\alpha_i + \sin \alpha_i) \geq 0$$

mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck.

E. Braune, Linz, Donau, Österreich

## Literaturüberschau

*Introduction to Algebra.* Von R. KOCHENDÖRFFER. 414 Seiten. Wolters-Noordhoff, Groningen 1972.

Dieses Buch ist für Studenten des zweiten Jahres des «undergraduate» Studiums an einer amerikanischen Universität geschrieben und infolgedessen recht elementar gehalten. Trotzdem