Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **29 (1974)**

Heft 6

Kleine Mitteilungen

Über die Summierung von Kosekantenreihen mit Hilfe des Residuensatzes

Herrn Professor Dr. Hans-Joachim Kanold zum 60. Geburtstag

G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD zeigten in [1] und [2], dass Reihen der Form $\Sigma\,(-1)^n/(n^s \sin\alpha\, n\pi)$ (α algebraisch, $s = \sigma + it$) für hinreichend grossen Realteil von s absolut konvergieren und sich in Beziehung zur Doppel-Zeta-Funktion ζ_2 setzen lassen. In dieser Note soll für natürliche ungerade $s = 2m + 1$ ($m \geqq 1$) und für quadratische Irrationalitäten α eine Summierung solcher Reihen in endlicher Form gegeben werden.

Es seien α eine positive algebraische und m eine natürliche Zahl. Für jede natürliche Zahl ν seien Q_ν das in der komplexen Zahlenebene gelegene Quadrat mit den Ecken $(\nu + 1/2)\,(\pm 1 \pm i)$ und N_ν die grösste natürliche Zahl kleiner als $\alpha(\nu + 1/2)$. Dann hat die Funktion

$$f(z) = \frac{\pi}{z^{2m+1} \sin \pi z \cdot \sin \alpha \pi z}$$

in Q_ν folgende Singularitäten:

a) einen Pol der Ordnung $2m + 3$ in $z = 0$,

b) einfache Pole in den Punkten $z = \pm n$ ($n = 1, 2, \ldots, \nu$),

c) einfache Pole in den Punkten $z = \pm n/\alpha$ ($n = 1, 2, \ldots, N_\nu$).

Bezeichnet Σ' eine Summe, in der der Index 0 auszulassen ist, so gilt nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial Q_\nu} f(z)\, dz = \operatorname*{res}_{z=0} f + \sum_{n=-\nu}^{\nu}{}' \operatorname*{res}_{z=n} f + \sum_{n=-N_\nu}^{N_\nu}{}' \operatorname*{res}_{z=n/\alpha} f\,. \tag{1}$$

Auf den horizontalen Seiten von Q_ν gilt

$$|\sin \pi z| \geqq |\sinh \pi (\nu + 1/2)| \geqq \sinh \pi \text{ und } |\sin \alpha \pi z| \geqq \sinh \alpha \pi\,,$$

also gilt dort

$$|f| = O\left(\frac{1}{\nu^{2m+1}}\right).$$

Auf den vertikalen Quadratseiten gilt

$$|\sin \pi z| = \cosh\,(\pi \cdot \operatorname{Im} z) \geqq 1\,.$$

Schwieriger wird die Abschätzung von $|\sin \alpha \pi z|$ nach unten. Dazu setzen wir

$$\alpha\left(\nu + \frac{1}{2}\right) - k_\nu = \frac{\delta_\nu}{2} \quad \text{mit} \quad |\delta_\nu| \leqq 1$$

(d.h. k_ν ist die zu $\alpha(\nu + 1/2)$ nächstgelegene natürliche Zahl) und erhalten

$$\frac{\delta_\nu}{2} = \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 + k_\nu \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) - k_\nu^2}{\frac{1}{\alpha}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) + k_\nu}\,.$$

Wird ab jetzt α als quadratische Irrationalität vorausgesetzt, die der Gleichung $\alpha - 1/\alpha = g$ (g ganze Zahl) genügt, d.h.

$$\alpha = \frac{\sqrt{g^2+4}+g}{2},$$

so lässt sich $|\delta_\nu/2|$ nichttrivial nach unten abschätzen, da dann der Betrag des Zählers nicht kleiner als 1/4 werden kann. Somit ist

$$\left|\frac{\delta_\nu}{2}\right| \geqq \frac{A}{\nu},$$

mit einer nur von α abhängigen Konstanten A.

Mit $|2x/\pi| \leqq |\sin x|$ für $|x| \leqq \pi/2$ folgt für hinreichend grosses ν auf den vertikalen Seiten von Q_ν

$$|f| = O\left(\frac{1}{\nu^{2m}}\right).$$

Insgesamt gilt also

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_\nu} f(z)\,dz\right| = O\left(\frac{1}{\nu^{2m-1}}\right),$$

und folglich für $\nu \to \infty$ nach (1)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \operatorname*{res}_{z=n} f + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \operatorname*{res}_{z=n/\alpha} f = -\operatorname*{res}_{z=0} f. \tag{2}$$

Mit

$$\operatorname*{res}_{z=n} f = \frac{(-1)^n}{n^{2m+1}\sin\alpha\pi n}, \qquad \operatorname*{res}_{z=n/\alpha} f = \frac{(-1)^n\alpha^{2m}}{n^{2m+1}\sin\pi n/\alpha}$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2m+1}}\left(\frac{1}{\sin\alpha\pi n}+\frac{\alpha^{2m}}{\sin\pi n/\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{z=0} f. \tag{3}$$

Zur Berechnung von

$$\operatorname*{res}_{z=0} f = \frac{1}{(2m+2)!}\frac{d^{2m+2}}{dz^{2m+2}}\left(\frac{\pi z^2}{\sin\pi z\cdot\sin\alpha\pi z}\right)\Big|_{z=0}$$

verwendet man zweckmässig die Potenzreihenentwicklung von $\pi x/\sin\pi x$ und erhält nach leichter Rechnung ($B_{2\mu}$ sind die Bernoulli-Zahlen)

$$R(m,\alpha) := -\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{z=0} f \tag{4}$$

$$= \frac{(-1)^m\pi^{2m+1}}{2\alpha}\sum_{\mu=0}^{m+1}\frac{(2^{2\mu}-2)\,(2^{2m+2-2\mu}-2)\,\alpha^{2\mu}}{(2\mu)!\,(2m+2-2\mu)!}B_{2\mu}B_{2m+2-2\mu}.$$

Mit (3) und (4) ist die geschlossene Summierbarkeit gewisser Kosekantenreihen gezeigt.

Speziell folgt für $g \equiv 0\ (2)$, also $\alpha = \sqrt{j^2+1}+j$ (j ganz), wegen $\sin \pi n/\alpha = \sin \alpha \pi n = (-1)^{nj} \sin(\pi n \sqrt{j^2+1})$ die Summenformel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(j+1)}}{n^{2m+1} \sin(\pi n \sqrt{j^2+1})} = \frac{R(m, \sqrt{j^2+1}+j)}{1+(\sqrt{j^2+1}+j)^{2m}}. \tag{5}$$

Für $j = 2q$ ($q \neq 0$) bzw. $j = 2q+1$ ergeben sich Summationsformeln mit bzw. ohne alternierendes Vorzeichen.

G. Bach, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Some problems of diophantine approximation: The lattice points of a right angled triangle*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) *20*, 15–36 (1922).

[2] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Some problems of diophantine approximation: A series of cosecants*, Bull. Calcutta Math. Soc. *20*, 251–266 (1930).

Proof of Yff's Conjecture on the Brocard Angle of a Triangle

Let $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ be the three angles of a triangle (T), and let ω be the Brocard angle of (T). One formula for ω is

$$\csc^2\omega = \csc^2\alpha_1 + \csc^2\alpha_2 + \csc^2\alpha_3, \tag{1}$$

and the inequality

$$\omega \leq \frac{\pi}{6} \tag{2}$$

is well known.

Yff [1] p. 500 conjectured that ω satisfies the inequality

$$8\,\omega^3 \leq \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3. \tag{3}$$

We here give a proof of (3).

The function $(\sin x)/x$ decreases steadily in the interval $0 < x < \pi/2$; this together with (2) implies that

$$\frac{\sin\omega}{\omega} \geq \frac{3}{\pi}. \tag{4}$$

Combining (4) and (1) and applying the familiar inequality between the arithmetic and geometric mean, we obtain

$$\left(\frac{\pi}{3\,\omega}\right)^2 \geq \csc^2\omega \geq 3\left(\sqrt[3]{\csc\alpha_1 \csc\alpha_2 \csc\alpha_3}\right)^2 \tag{5}$$

and it remains to find a sharp upper bound for the product $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3$. To do this consider the representation formula

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{x}{\pi n}\right)^2\right] = x P(x). \tag{6}$$

Since $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, we have

$$\begin{aligned} P(\alpha_1)\, P(\alpha_2)\, P(\alpha_3) &= \prod_{i=1}^{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\alpha_i}{\pi n}\right)^2\right] \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{3} \left[1 - \left(\frac{\alpha_i}{\pi n}\right)^2\right] \\ &\leq \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{3n}\right)^2\right]^3 \\ &= \left[P\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3, \end{aligned}$$

where we have made another use of the arithmetic-geometric mean inequality.

It is now obvious from this last inequality that

$$\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \leq \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3, \tag{7}$$

which, together with (5), gives

$$\left(\frac{\pi}{3\omega}\right)^2 \geq 3 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}} \cdot \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2. \tag{8}$$

This readily yields (3).

It is easy to see [from (5) and (8)] that if equality holds in (3) then (T) is an equilateral triangle. Conversely, if (T) is equilateral, then equality holds in (3). We finally remark that in addition to being a refinement of (2), the inequality in (3) is a statement about the product of the angles of (T); there do not seem to be many statements of this type in the elementary geometry literature.

Faruk Abi-Khuzam, Syracuse University

REFERENCES

[1] P. Yff, *An Analogue of the Brocard Points*, Amer. Math. Monthly *70* (1963).

Elementarmathematik und Didaktik

Glücksspiel und Markovketten

Zum 350. Geburtstag von Blaise Pascal (1623–1662)

1. Einleitung und Problemstellung

Bereits im 15. und 16. Jahrhundert beschäftigten sich italienische Mathematiker wie Paccioli, Tartaglia und Cardano mit der Analyse von Glücksspielen. Erwähnenswert ist der Franziskanermönch und Mathematikprofessor Fra Luca Paccioli, der vermutlich als erster im Jahre 1494 das Problem aufwarf, welches uns in der Folge beschäftigen wird; eine einwandfreie Lösung erfuhr es allerdings erst rund 150 Jahre später [1].

Im 17. Jahrhundert vergnügten sich viele französische Aristokraten in den feinen Salons mit allerlei Glücksspielen. Chevalier de Méré, ein Freund Pascals, fand seine praktischen Erfahrungen im Abschliessen von Wetten im Widerspruch zu gewissen theoretischen Überlegungen. Diese basierten im herkömmlichen «Proportionaldenken», das sich dann auch als fragwürdig herausstellte. Blaise Pascal und