

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1974)
Heft: 6

Artikel: Glücksspiel und Markovketten
Autor: Loeffel, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-29908>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 05.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Since $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, we have

$$\begin{aligned} P(\alpha_1) P(\alpha_2) P(\alpha_3) &= \prod_{i=1}^3 \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\alpha_i}{\pi n} \right)^2 \right] \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^3 \left[1 - \left(\frac{\alpha_i}{\pi n} \right)^2 \right] \\ &\leq \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{3n} \right)^2 \right]^3 \\ &= \left[P \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]^3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \right)^3, \end{aligned}$$

where we have made another use of the arithmetic-geometric mean inequality.

It is now obvious from this last inequality that

$$\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \leq \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \right)^3, \quad (7)$$

which, together with (5), gives

$$\left(\frac{\pi}{3\omega} \right)^2 \geq 3 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}} \cdot \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \right)^2. \quad (8)$$

This readily yields (3).

It is easy to see [from (5) and (8)] that if equality holds in (3) then (T) is an equilateral triangle. Conversely, if (T) is equilateral, then equality holds in (3). We finally remark that in addition to being a refinement of (2), the inequality in (3) is a statement about the product of the angles of (T) ; there do not seem to be many statements of this type in the elementary geometry literature.

Faruk Abi-Khuzam, Syracuse University

REFERENCES

- [1] P. YFF, *An Analogue of the Brocard Points*, Amer. Math. Monthly 70 (1963).

Elementarmathematik und Didaktik

Glücksspiel und Markovketten

Zum 350. Geburtstag von Blaise Pascal (1623–1662)

1. Einleitung und Problemstellung

Bereits im 15. und 16. Jahrhundert beschäftigten sich italienische Mathematiker wie Paccioli, Tartaglia und Cardano mit der Analyse von Glücksspielen. Erwähnenswert ist der Franziskanermönch und Mathematikprofessor Fra Luca Paccioli, der vermutlich als erster im Jahre 1494 das Problem aufwarf, welches uns in der Folge beschäftigen wird; eine einwandfreie Lösung erfuhr es allerdings erst rund 150 Jahre später [1].

Im 17. Jahrhundert vergnügten sich viele französische Aristokraten in den feinen Salons mit allerlei Glücksspielen. Chevalier de Méré, ein Freund Pascals, fand seine praktischen Erfahrungen im Abschliessen von Wetten im Widerspruch zu gewissen theoretischen Überlegungen. Diese basierten im herkömmlichen «Proportionaldenken», das sich dann auch als fragwürdig herausstellte. Blaise Pascal und

Pierre Fermat (1601–1665) wurden durch die Anregungen von de Méré in einen spannenden Dialog verwickelt, der in Form eines Briefwechsels der Nachwelt teilweise erhalten blieb.

Der 29. Juli 1654 kann als «Geburtsstunde» der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet werden [2]. Allgemein bekannt dürfte das sogenannte «*problème des dés*» sein. Es geht hier um die Frage, ob die folgenden Ereignisse gleich wahrscheinlich sind:

Mit einem (symmetrischen) Würfel in 4 Würfeln mindestens eine Sechs bzw. in 24 Doppelwürfen mindestens eine Doppelsechs zu realisieren.

Weniger bekannt, doch für die weitere Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von grösserer Tragweite ist die Frage nach der *gerechten Aufteilung des gesamten Einsatzes bei vorzeitigem Abbruch eines Glücksspiels*. Dieses sogenannte «*problème des parties*» soll vorerst am historischen Beispiel vorgestellt werden.

Zwei Spieler A und B leisten je einen Einsatz von $S = 32$ Fr. und vereinbaren folgendes Glücksspiel: Fällt eine symmetrische Münze auf Kopf (K), erhält A einen Punkt zugesprochen, andernfalls der Spieler B . *Wer zum erstenmal 7 Punkte verzeichnen kann*, hat gewonnen und erhält den gesamten Einsatz von $2S = 64$ Fr. Aus irgendeinem Grunde muss das Spiel in dem Augenblick unterbrochen werden, wo A über 5 und B über 4 Punkte verfügt.

In welchem Verhältnis ist nun der Gesamteinsatz gerechterweise unter die beiden Spieler zu verteilen?

Naheliegend, doch kaum zu begründen, sind die beiden Vorschläge «im Verhältnis der erreichten Punkte», d. h. 5:4, oder «im umgekehrten Verhältnis der noch benötigten Punkte», also 3:2. So argumentierte unter anderem Paccioli.

Im nachfolgenden Abschnitt werden die Lösungsansätze von Fermat und Pascal an obigem Beispiel erörtert und dann verallgemeinert. Was die Lösung von Fermat betrifft, sei auch auf das fundamentale Werk «*Ars coniectandi*» von Jakob Bernoulli verwiesen ([3], S. 106 ff.).

2. Klassische Lösungsansätze von Fermat und Pascal

2.1 Kombinatorische Lösung nach Fermat

Wir beziehen uns auf das historische Beispiel im vorhergehenden Abschnitt. *Nach Spielabbruch* benötigt A noch 2 und B noch 3 Punkte bis zum Sieg. Wir denken uns jetzt das Spiel in seinen möglichen Verläufen *fiktiv* fortgesetzt.

Wenn A künftighin einen Punkt und B deren zwei zugesprochen erhält (gleichgültig in welcher Reihenfolge), stehen beide unentschieden, da sie je noch einen Punkt bis zum Sieg benötigen. Mit anderen Worten: Nach spätestens 4 Würfeln (oder Partien) steht endgültig fest, welcher Spieler den Gesamteinsatz errungen hat.

Die $2^4 = 16$ künftigen, gleichwahrscheinlichen Spielverläufe können wie folgt dargestellt werden (der Buchstabe gibt an, welcher Spieler den Punkt bekommt):

* AAAA	* ABAA	* BAAA	* BBAA
* AAAB	* ABAB	* BAAB	BBAB
* AABA	* ABBA	* BABA	BBBA
* AABB	ABBB	BABB	BBBB

Fig. 1

2.2 Lösungsansatz von Pascal

Aus dem unter 1. genannten Briefwechsel geht hervor, dass Pascal von der Grundidee des *erwarteten Erlöses* ausging. Dieser ist verantwortlich für die Aufteilung des gesamten Spieleinsatzes. Für beide Spieler kann das *künftige* Geschehen durch einen sogenannten *Spielbaum* veranschaulicht werden. Er stellt einen einfachen, stochastischen Prozess dar (oder eine Lotterie), der mit gewissen Wahrscheinlichkeiten zu einer Auszahlung von 64 Fr. an *A* bzw. *B* führt.

Mit (i, j) sei der *Zustand* bezeichnet, in dem der Spieler *A* noch *i* und Spieler *B* noch *j* Punkte benötigt, bis er den totalen Einsatz $2S$ erhält. Im Zustand $(0, j)$ erhält *A* den Betrag $2S$ und *B* nichts, im Zustand $(i, 0)$ hingegen erhält *B* den Betrag $2S$ und *A* nichts.

Diese zweite Betrachtungsweise hat den unbestreitbaren Vorteil, dass der prospektive Lösungsansatz einerseits in seinen möglichen Verästelungen durchschaubar wird (Fig. 2) und andererseits die natürliche Verbindung zum modernen Ansatz der stochastischen Prozesse ermöglicht (Abschnitt 3).

Der nachfolgende Baum zeigt alle möglichen künftigen Spielabläufe und zwar *vom Spieler A aus gesehen*.

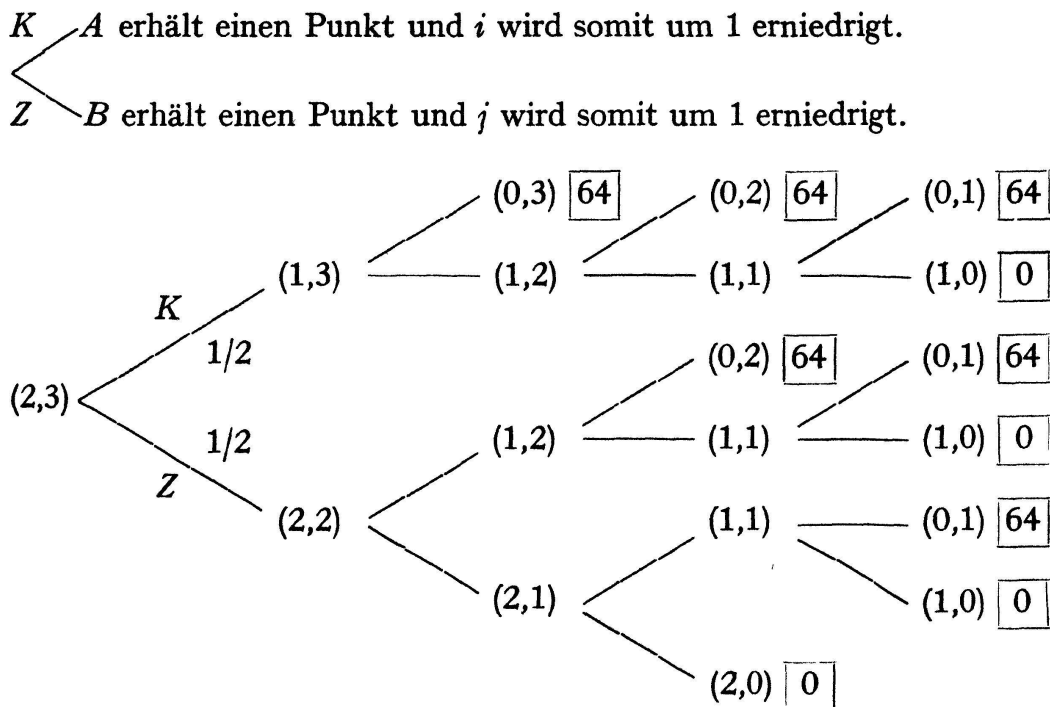


Fig. 2

Wir berechnen nun den erwarteten Erlös $E_A(2,3)$ für *A* aufgrund obiger Figur. Nach den Regeln der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung folgt:

$$\begin{aligned}
 E_A(2,3) &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right] \cdot 64 \\
 &\quad + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right] \cdot 0 = \frac{11}{16} \cdot 64 = 44 .
 \end{aligned}$$

Analog erhält man für Spieler B den erwarteten Erlös $E_B(2,3) = 20$. Der totale Einsatz ist somit im Verhältnis $E_A : E_B = 44 : 20 = 11 : 5$ unter die Spieler A und B aufzuteilen.

Allgemein kann man zeigen, dass die Lösungsansätze nach 2.1 und 2.2 zum gleichen Resultat führen. Im übrigen halten wir fest, dass der erwartete Erlös $E_{m,n}$ für den Spieler A der folgenden Differenzengleichung genügt:

$$2.2.1 \begin{cases} E_{m,n} = \frac{1}{2} \cdot [E_{m-1,n} + E_{m,n-1}] & \text{mit den Randbedingungen} \\ E_{0,n} = 2S \text{ und } E_{m,0} = 0 & \text{für alle positiven } m, n. \end{cases}$$

Bemerkung: $E_{m,n}$ könnte auch *iterativ* und ohne Kenntnis einer Formel ermittelt werden, indem man zuerst nach Figur 2 den Spielbaum konstruiert. Jetzt wird von rückwärts her $E_{i,j}$ nach 2.21 sukzessive berechnet («Rollback-Analyse»), bis das Verfahren bei $E_{m,n}$ seinen Abschluss findet.

3. Lösung mit Hilfe von Markovketten

Spiel als spezieller stochastischer Prozess (Markovkette)

Figur 2 stellt das künftige Geschehen nach vorzeitigem Abbruch des Spieles als *stochastischen Prozess* dar, der verschiedene sogenannte *Zustände* annehmen kann (siehe auch [4], S. 115f.).

Zum Zeitpunkt $t = 0$ benötigen die beiden Spieler noch m bzw. n Punkte bis zu ihrem Gewinn. Somit ist (m, n) der *Anfangszustand* eines stochastischen Prozesses, der verschiedene Zustände (i, j) durchlaufen kann und spätestens zur Zeit $T = m + n - 1$ zu einem Gewinn für A oder B führt.

Die Menge Z der möglichen Zustände ist wie folgt definiert:

Def. 3.1

$$Z = \{(i, j) \text{ für } i = 0, \dots, m \text{ und } j = 0, \dots, n\} - \{(0, 0)\},$$

wobei $\{(0, j) / j = 1, \dots, n\} = G_A$ bzw.

$$\{(i, 0) / i = 1, \dots, m\} = G_B$$

die Gewinnzustände von A bzw. B darstellen.

Für unser Beispiel geht aus Figur 2 hervor:

$$Z = \{(23), (22), (21), (13), (12), (11), G_A, G_B\}.$$

Allgemein gibt es $\varrho = m \cdot n + 2$ verschiedene Zustände.

Befindet sich der Spielprozess zu irgendeiner Zeit t im Zustand (i, j) , so geht er im nächsten Zeitpunkt mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ in den Zustand $(i - 1, j)$ bzw. $(i, j - 1)$ über, je nachdem ob A bzw. B einen Gewinnpunkt zugesprochen erhält. Erreicht der Prozess den Zustand G_A bzw. G_B , so bleibt er dort mit Wahrscheinlichkeit 1.

Bezeichnen wir mit $p_{(i,j)(k,l)}$ die sogenannte *Übergangswahrscheinlichkeit*, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich der Prozess zur Zeit $t + 1$ im Zustand (k, l) befindet, wenn er sich zur Zeit t im Zustand (i, j) befand. Nach den vereinbarten Spielregeln folgt:

Def. 3.2

$$p_{(i,j)(k,l)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ für } k = i - 1 \text{ und } l = j & i = 1, \dots, m \\ \frac{1}{2} \text{ für } k = i \text{ und } l = j - 1 & j = 1, \dots, n \\ 1 \text{ für } i = k = 0 \text{ oder für } j = l = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

In Fig. 2 ist zu beachten, dass die Auszahlung von $2S = 64$ Fr. dem Zustand G_A und die Auszahlung 0 dem Zustand G_B in unserer neuen Symbolik entspricht.

Der nachfolgende sogenannte *Transitionsgraph* ([5], S. 41) gibt eine anschauliche Darstellung des Ablaufs unseres stochastischen Prozesses gemäss Def. 3.2.

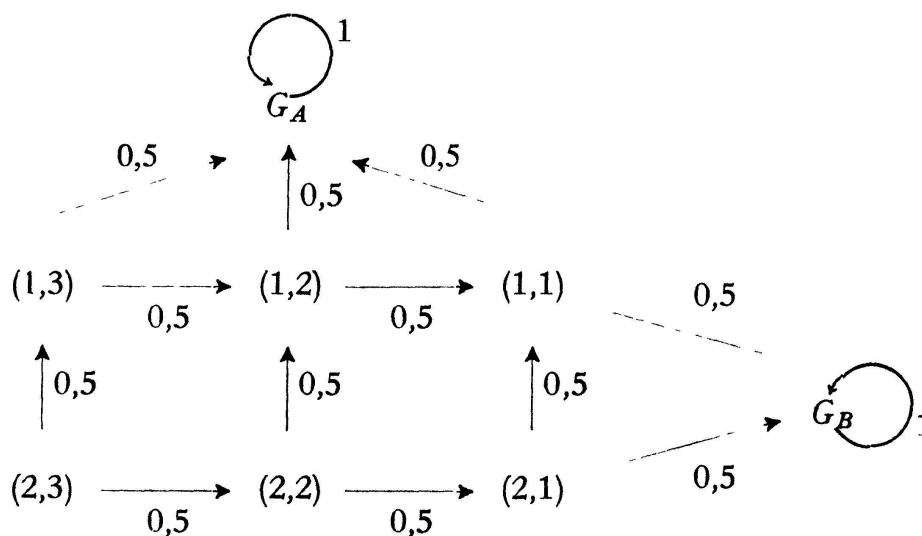


Fig. 3

		z_1 (2,3)	z_2 (2,2)	z_3 (2,1)	z_4 (1,3)	z_5 (1,2)	z_6 (1,1)	z_7 G_A	z_8 G_B
z_1	(2,3)	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0
z_2	(2,2)	0	0	1/2	0	1/2	0	0	0
z_3	(2,1)	0	0	0	0	0	1/2	0	1/2
z_4	(1,3)	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0
z_5	(1,2)	0	0	0	0	0	1/2	1/2	0
z_6	(1,1)	0	0	0	0	0	0	1/2	1/2
z_7	G_A	0	0	0	0	0	0	1	0
z_8	G_B	0	0	0	0	0	0	0	1

Fig. 4

Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{(i,j)(k,l)}$ für $m = 2, n = 3$.

In Figur 4 haben wir eine sogenannte *stochastische Matrix*, d.h. eine quadratische Matrix der Ordnung ϱ mit lauter nicht negativen Zahlen und der Zeilensumme 1. Bezeichnen wir die möglichen Zustände mit z_i ($i = 1, \dots, \varrho$) und mit $p_{z_i z_k} = p_{ik}$ die Übergangswahrscheinlichkeiten, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\varrho} p_{ik} = 1 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, \varrho,$$

denn der Prozess geht mit Sicherheit von einem Zustand z_i in irgendeinen Zustand $z_k \in Z$ über.

Def. 3.3

Mit $w_{z_i}(t) = w_i(t)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Prozess zur Zeit t im Zustand z_i ($i = 1, \dots, \varrho$) befindet.

Wir suchen nun eine *rekursive Beziehung* für die sogenannten *Zustandswahrscheinlichkeiten* $w_i(t)$. Der Prozess befindet sich zur Zeit $(t + 1)$ im Zustand z_i , wenn er sich unmittelbar vorher in irgendeinem Zustand z_k ($k = 1, \dots, \varrho$) befindet und dann im nächsten Moment in z_i übergeht. Somit folgt:

Satz 3.1

$$w_i(t+1) = \sum_{k=1}^{\varrho} w_k(t) \cdot p_{ki}; \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, \varrho \\ t = 0, \dots, T \end{array}$$

An dieser Stelle sei vermerkt, dass unser spezieller stochastischer Prozess in die Kategorie der sogenannten *homogenen Markovketten mit endlich vielen Zuständen* gehört (vgl. [5], S. 19).

Satz 3.1 gestattet uns bei Kenntnis der *Anfangs-Zustandswahrscheinlichkeiten* $w_i(0)$ ($i = 1, \dots, \varrho$) alle folgenden rekursiv zu ermitteln. Dazu ist die Vektor- und Matrixschreibweise geeignet.

$\bar{w}(t) = [w_1(t), \dots, w_i(t), \dots, w_\varrho(t)]$ Zeilenvektor der Zustandswahrscheinlichkeiten zur Zeit t

$U_{\varrho\varrho} = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1i} & \dots & p_{1\varrho} \\ \vdots & & & & \\ p_{\varrho 1} & \dots & p_{\varrho i} & \dots & p_{\varrho\varrho} \end{bmatrix}$ stochastische Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten

$\bar{w}(0) = (1, 0, 0, \dots, 0)$, denn zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Prozess mit Sicherheit im Zustand (m, n) .

Nun gilt nach der Definition der Matrizenmultiplikation

$$\bar{w}(t+1) = \bar{w}(t) \cdot U; \quad t = 0, 1, \dots, T$$

$$\bar{w}(1) = \bar{w}(0) \cdot U$$

$$\bar{w}(2) = \bar{w}(1) \cdot U = \bar{w}(0) \cdot U^2$$

Allgemein gilt:

Satz 3.2 $\bar{w}(T) = \bar{w}(0) \cdot U^T$ mit $\bar{w}(0) = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $T = m + n - 1$

Spätestens nach $T = m + n - 1$ Partien, d.h. zur Zeit T befindet sich der Prozess entweder im Zustand G_A (Gewinn für A) oder im Zustand G_B (Gewinn für B).

Bezugnehmend auf den Lösungsansatz von Fermat in 2.1 können wir die Gewinnwahrscheinlichkeiten p_A und p_B als Zustandswahrscheinlichkeiten $w_7(T)$ und $w_8(T)$ interpretieren.

Der Zustandsvektor $\bar{w}(T)$ hat also die Form

$$\bar{w}(T) = [0, 0, \dots, 0, w_7(T), w_8(T)],$$

und der gesamte Einsatz von $2S = 64$ Fr. ist im Verhältnis $w_7(T) : w_8(T)$ unter die Spieler A und B zu verteilen.

Die Berechnung mit dem Computer (basierend auf einem einfachen BASIC-Programm¹⁾ hat für unser Beispiel ergeben:

$$\bar{w}(4) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.6875, 0.3125).$$

Somit

$$w_7(4) : w_8(4) = 11 : 5,$$

was mit den Resultaten von Fermat und Pascal übereinstimmt.

4. Zusammenfassung

Vor fast 500 Jahren wurde ein unscheinbares Problem aus der Welt der Glücksspiele aufgeworfen, das *problème des parties*. Anfänglich erfuhr es eine falsche Behandlung, denn die damalige Betrachtungsweise war noch stark im «Proportionaldenken» verhaftet. Erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts war die Zeit reif! Die beiden kongenialen Mathematiker Fermat und Pascal fanden unabhängig voneinander richtige Lösungen. Die Freude war gross, so dass Pascal schreiben konnte: «Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris» ([2], S. 77). Gleichzeitig wurden auch die Fundamente der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelegt, der später eine so glanzvolle Entwicklung beschieden sein sollte.

Wesentlich an den beiden Lösungsansätzen ist die *prospektive* Behandlung und die Ausrichtung auf *Wahrscheinlichkeiten* eines künftigen Gewinnes. Während Fermat den *kombinatorischen* Charakter hervorhob («Triangle arithmétique»), arbeitete Pascal, vermutlich als erster, mit dem Begriff des *Erwartungswertes* eines Zufallsvorganges oder Lotterie. Die dritte, moderne Art der Lösung besteht in der Interpretation des künftigen Spielgeschehens als spezieller *stochastischer* Prozess, genannt *Markovkette*. Dieser Ansatz lässt sich leicht auf 3 oder mehr Spieler verallgemeinern und auch die numerischen Berechnungen bieten für nicht allzu grosse m und n keine wesentlichen Probleme.

H. Loeffel, St. Gallen

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. BÜHLMANN, *Die «Geburtsstunde» der mathematischen Statistik*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich 109, Heft 3, 1964.
- [2] B. PASCAL, *Œuvres complètes*, Bibliothèque de la pléiade (Editions Gallimard, 1954).
- [3] J. BERNOULLI, *Ars conjectandi (1713)*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 107 (Verlag W. Engelmann, Leipzig 1899).
- [4] H. FREUDENTHAL, *Wahrscheinlichkeit und Statistik* (Verlag R. Oldenbourg, München, Wien 1963).
- [5] F. FERSCHL, *Markovketten, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems*, 35 (Springer-Verlag, Berlin 1970).

¹⁾ BASIC ist eine einfache, *problemorientierte* Programmiersprache, die sich besonders zur Lösung von mathematisch-statistischen Aufgaben eignet.