

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 30 (1975)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

exceeds m . By Bertrand's theorem [2, p. 343] $m < p < 2m$. Therefore, if $m > 3$, $\varphi(p) = 2[(p-1)/2] |m|$, so that Euler's theorem gives $(m!)^{m!} \equiv 1 \pmod{p}$. It is easy to see that this congruence also holds for $m = 2, 3$. Since $p \mid (2m)!$ the proof of the lemma is complete.

Proof of the theorem. For $i = 1, \dots, n$, the exponent e_i of the highest power of q_i which divides $d!$, is

$$e_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{d}{q_i^j} \right] < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{q_i^j} < d$$

[2, p. 342]. Since for $1 \leq i \leq n-1$

$$\left[\frac{d}{q_{i+1}} \right] = \frac{d}{q_{i+1}} < \frac{d}{q_i} = \left[\frac{d}{q_i} \right],$$

$$\left[\frac{d}{q_{i+1}^j} \right] \leq \left[\frac{d}{q_i^j} \right] \quad (j = 2, 3, \dots),$$

we have $d > e_1 > e_2 > \dots > e_n$. Hence $t = q_1^{\alpha(1)} q_2^{\alpha(2)} \dots q_n^{\alpha(n)}$, where $0 < \alpha(1) < \alpha(2) < \dots < \alpha(n)$. This completes the proof.

Reijo Ernvall, University of Turku, Finland

REFERENCES

- [1] C. V. EYNDEN, *A Proof of Gandhi's Formula for the n th Prime*, Amer. Math. Monthly 79, 625 (1972).
- [2] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. (Oxford University Press, Oxford 1960).
- [3] W. SIERPIŃSKI, *Sur une Formulae Donnant tous les Nombres Premiers*, C. R. Acad. Sci (Paris) 235, 1078–1079 (1952).

Aufgaben

Aufgabe 709. It is well known (cf. e.g. H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, *Combinatorial Geometry in the Plane*, New York 1964, p. 4, Problem 5) that no three distinct points of a square lattice can be the vertices of an equilateral triangle. Show that no four distinct points of an equilateral triangular lattice can be the vertices of a square.

M. S. Klamkin, Dearborn, Michigan, USA

Erste Lösung: Wir beweisen allgemeiner den folgenden Satz:

Ein rechtwinkliges Dreieck kann genau dann in ein reguläres Dreiecksgitter eingelagert werden (d.h., die Ecken sind Gitterpunkte), wenn das Verhältnis seiner Katheten die Form $r\sqrt{3}$ mit einer positiven rationalen Zahl r hat.

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung der Aufgabe 709, aber z.B. auch der Satz: Kein pythagoräisches Dreieck kann in ein reguläres Dreiecksgitter eingelagert werden.

Beweis: I. \mathbf{a} und \mathbf{b} seien zwei Einheitsvektoren, die das Gitter aufspannen, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1/2$. A , B und C seien drei verschiedene Gitterpunkte, die ein bei C rechtwinkliges Dreieck bilden. Ist dann etwa $\mathbf{BC} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, $\mathbf{CA} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ mit ganzen Zahlen x, y, u, v , so ist $\mathbf{BC} \cdot \mathbf{CA} = 0$, folglich $x(2u+v) + y(u+2v) = 0$. Es gibt also

eine rationale Zahl t mit $x = t(u + 2v)$, $y = -t(2u + v)$. Damit wird $BC^2 = x^2 + xy + y^2 = t^2[(u + 2v)^2 - (u + 2v)(2u + v) + (2u + v)^2] = 3t^2(u^2 + uv + v^2) = 3t^2 \cdot CA^2$, woraus folgt $\overline{BC}/\overline{CA} = |t|\sqrt{3}$.

II. Ist umgekehrt ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck mit $\overline{BC}/\overline{CA} = (p/q)\sqrt{3}$ ($p, q \in \mathbb{N}$), so ist $\overline{BC}/2p = (1/2)(\overline{CA}/q)\sqrt{3}$. Also ist $\overline{BC}/2p$ Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Ecke in C und der Gegenseite parallel zu AC , bei dem die Seitenlänge \overline{CA}/q beträgt. Offenbar ist ABC in das von diesem regulären Dreieck erzeugte Gitter eingelagert. E. Teuffel, Korntal, BRD

Zweite Lösung: Identifiziert man die Ebene des regulären Dreiecksgitters mit der komplexen Zahlenebene, so darf für die Menge G der Gitterpunkte folgende Darstellung vorausgesetzt werden:

$$G = \{z \mid z = m + n\varepsilon; \quad m, n \in \mathbb{Z}; \quad \varepsilon = e^{\pi i/3}\}.$$

Angenommen es gäbe ein von den vier Gitterpunkten

$$z_k = m_k + n_k \varepsilon \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

gebildetes Quadrat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf vorausgesetzt werden, dass $z_0 = 0$ ist und dass die übrigen Ecken so numeriert sind, dass $z_3 = iz_1$ ist. Aus $m_3 + n_3\varepsilon = i(m_1 + n_1\varepsilon)$ folgt, dass i in dem Zahlkörper $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ liegen müsste, der durch Adjunktion von ε zum Körper \mathbf{Q} der rationalen Zahlen entsteht. Dies trifft bekanntlich nicht zu, so dass die oben gemachte Annahme zum Widerspruch führt. (Wäre nämlich $i = a + b\varepsilon$ mit $a, b \in \mathbf{Q}$, dann müsste $b \neq 0$ sein wegen $i \notin \mathbf{Q}$, ferner wäre $i = a + b/2 + i\sqrt{3}b/2$, also $\sqrt{3} = 2/b$ im Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{3}$).

Verallgemeinerung: Es gilt folgender Satz: Wenn sämtliche Ecken eines N -Ecks ($N > 2$) Gitterpunkte des regulären Dreiecksgitters sind, so ist $N = 3$ oder $N = 6$.

Beweis: Die Ecken des regulären N -Ecks seien z_0, z_1, \dots, z_{N-1} , wobei nach Voraussetzung gilt: $z_k = m_k + n_k\varepsilon$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$). Wie oben darf $z_0 = 0$ und $z_{N-1} = e^{i\alpha}z_1$ vorausgesetzt werden, wo α der Innenwinkel des regelmässigen N -Ecks ist. Wegen $\alpha = \pi(1 - 2/N)$ ist dann $m_{N-1} + n_{N-1}\varepsilon = -e^{-2\pi i/N}(m_1 + n_1\varepsilon)$. Also gehört die primitive Einheitswurzel $e^{-2\pi i/N}$ dem quadratischen Zahlkörper $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ an. Da der Grad einer primitiven N -ten Einheitswurzel gleich $\varphi(N)$ (Eulerfunktion!) ist und $\varphi(N) > 1$ ist wegen $N > 2$, muss $\varphi(N) = 2$ sein. Dies trifft genau dann zu, wenn $N \in \{3, 4, 6\}$ ist. Da der Fall $N = 4$ oben ausgeschlossen wurde, bleiben nur die Fälle $N = 3$ und $N = 6$ übrig, die trivialerweise realisierbar sind.

O. Buggisch, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), C. Bindschedler (Küsnacht ZH), J. Binz (Bolligen BE), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodorsdorf SO), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), I. Paasche (München, BRD), J. Schopp (Budapest, Ungarn), K. Stoop (Bern), E. Teuffel (Korntal, BRD; zweite Lösung) und H. Warncke (Pôrto Alegre, Brasilien).

Aufgabe 710. Man beweise, dass an der Stelle $x = 0$ sämtliche Ableitungswerte der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gemäss $f(x) = 2x/(1 + e^x)$ ($x \in \mathbb{R}$) ganzzahlig sind.

R. Weissauer, Ludwigshafen, BRD

Lösung: Die Mittag-Lefflersche Partialbruchzerlegung der meromorphen Funktion $2x/(1+e^x)$ der komplexen Variablen x ergibt sich zu

$$2x/(1+e^x) = x - 4x^2 \sum_{k=1}^{\infty} (x^2 + \pi^2(2k-1)^2)^{-1};$$

dabei ist $-x^2(\dots)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (x/\pi)^{2j} (2k-1)^{-2j}$ in $|x| < \pi$. Da die Doppelreihe

$\sum_k \sum_j \dots$ in $|x| < \pi$ absolut konvergiert, ist dort $2x/(1+e^x) = x + 4 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (x/\pi)^{2j}$

$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2j} = x + 4 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (x/\pi)^{2j} \zeta(2j) (1-2^{-2j})$, wobei $\zeta(\cdot)$ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet. Die Bernoullischen Zahlen B_1, B_2, \dots sind definiert durch

$$x/(e^x - 1) = 1 - x/2 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} B_j x^{2j}/(2j)! \quad (|x| < 2\pi),$$

und es ist wohlbekannt, dass $2^{2j-1} \pi^{2j} B_j = (-1)^{j+1} (2j)! \zeta(2j)$ für $j = 1, 2, \dots$ gilt; also ist in $|x| < \pi$

$$f(x) = 2x/(1+e^x) = x - 2 \sum_{j=1}^{\infty} x^{2j} (2^{2j} - 1) B_j / (2j)!,$$

und wir brauchen nur festzustellen, dass $2(2^{2j} - 1) B_j$ für $j = 1, 2, \dots$ ganzzahlig ist: Nach dem vom Staudtschen Satz ist aber

$$(-1)^j B_j = c_j + 1/2 + \sum_{\substack{p > 2 \\ (p-1) | 2j}} 1/p \quad \text{mit ganzzahligen } c_j.$$

Ist p eine Primzahl > 2 , so ist nach dem kleinen Fermatschen Satz $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; also gilt für jede Primzahl $p > 2$ mit $(p-1) | 2j$, dass $p | (2^{2j} - 1)$, und somit ist $2(2^{2j} - 1) B_j$ für jedes $j \geq 1$ ganzzahlig. P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodorsdorf SO), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), I. Paasche (München, BRD; zwei Lösungen), E. Teuffel (Kornthal, BRD; zwei Lösungen), M. Vowe (Therwil BL) und R. Wyss (Flumenthal SO).

Anmerkung der Redaktion: Verschiedene Einsender machen darauf aufmerksam, dass die nichtverschwindenden Ableitungswerte bei Null ungerade sind (vgl. etwa L. Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, Springer Berlin 1893, p. 117–118).

O. P. Lossers und E. Teuffel führen den Beweis unter Rückgriff auf die Identität $f(x) - x = -x(e^x - 1)/(e^x + 1)$ induktiv nach der Ableitungsordnung ohne Verwendung der Bernoullischen Zahlen.

Aufgabe 711. Aus n paarweise verschiedenen reellen Zahlen bilde man alle möglichen Summen mit k verschiedenen Summanden ($1 \leq k \leq n$). Wieviele verschiedene Werte nehmen diese Summen mindestens an?

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Lösung: Sind $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ die gegebenen n Zahlen, so ist die kleinste k -gliedrige Summe $m = a_1 + \dots + a_k$ und die grösste $M = a_{n-k+1} + \dots + a_n$. Der Übergang von der ersteren zur letzteren kann so vollzogen werden, dass zuerst der Index des k -ten Summanden von k bis n , dann der Index des $(k-1)$ -ten Summanden von $k-1$ bis $n-1$ je in Einerschritten wächst usw. Da es $k(n-k)$ solche Schritte gibt und da die Summe jedesmal zunimmt, treten hierbei $k(n-k) + 1$ verschiedene Summenwerte auf. Bei anderer Wahl der Einzelschritte können im allgemeinen noch andere Summenwerte auftreten. Bilden aber die a_i eine arithmetische Folge erster Ordnung, so erschöpfen jene $k(n-k) + 1$ Summenwerte alle Möglichkeiten zwischen m und M (Grenzen inbegriffen). $k(n-k) + 1$ ist also die gesuchte Minimalzahl.

C. Bindschedler, Küsnacht ZH

Weitere Lösungen sandten R. Acampora (Zürich), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), K. Spindelböck (Graz, Österreich), K. Stoop (Bern) und M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 712. $A(\alpha, 0), B(\beta, 0), C(\gamma, 0), D(\delta, 0)$ désignant les points d'intersection des droites a_1, a_2, a_3, a_4 – formant un quadrilatère complet – avec la droite de Simson du quadrilatère, le rayon R_M du cercle de Miquel (cercle passant par les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles et par le point de Miquel [point commun aux quatre cercles circonscrits] $M(0, \mu)$) est donné par

$$R_M = \frac{R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta}{4\mu^3} \quad (R_\alpha = MA, R_\beta = MB, \text{ etc.}) .$$

J. Quoniam, St-Etienne, France

Lösung: Es seien a_i die Seiten und $P_{ij} = a_i a_j$ die Ecken des gegebenen vollständigen Vierseits. Das Dreieck $a_j a_k a_l (= \text{Dreieck } P_{kl} P_{jl} P_{jk})$ habe den Umkreis c_i mit dem Mittelpunkt C_i und dem Radius r_i ($i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$). Die vier Kreise c_i gehen durch den Miquel-Punkt M . Der Fusspunkt des von M auf a_i gefällten Lotes sei A_i und seine Länge $R_i = MA_i$. Die vier Punkte A_i liegen auf der Simson-Geraden s . Der durch M und die vier Punkte C_i gehende Miquel-Kreis c_M habe den Mittelpunkt C_M und den Radius R_M . Die Kreise c_M und c_i schneiden einander in M und N_i .

Da der Kreis c_M durch die Punkte M und N_4 des Kreises c_4 und durch dessen Mittelpunkt C_4 geht, sind die Bogen MC_4 und $C_4 N_4$ von c_M gleich lang und somit die Peripheriewinkel $MC_3 C_4$ und $C_4 C_3 N_4$ von c_M gleich gross. $C_3 C_4$ ist also Symmetrale des Winkels $MC_3 N_4$. Die Schnittpunkte M und P_{12} der Kreise c_3 und c_4 liegen zu $C_3 C_4$ spiegelbildlich. Daher ist $C_3 C_4$ auch Symmetrale des Winkels $MC_3 P_{12}$ und somit liegen P_{12}, C_3 und N_4 auf einer Geraden. Der Winkel $MN_4 P_{12}$ ist daher zugleich ein zum Bogen MC_3 von c_M und ein zum Bogen MP_{12} von c_4 gehöriger Peripheriewinkel, und folglich sind auch die zugehörigen Zentriwinkel $MC_M C_3$ und $MC_4 P_{12}$ gleich gross. Analoge Beziehungen gelten für die ebenfalls auf dem Kreis c_4 liegenden Punkte P_{23} und P_{13} , und die korrespondierenden Punkte C_1 bzw. C_2 von c_M . Demnach sind die Sehnenvierecke $MC_1 C_2 C_3$ und $MP_{23} P_{13} P_{12}$ gleichsinnig ähnlich. Die Spiegelbilder P_{14}, P_{24}, P_{34} von M bezüglich der Seiten des Dreiecks $C_1 C_2 C_3$ liegen auf a_4 . Daher liegen die Fusspunkte der Lote aus M auf die Seiten des Dreiecks $C_1 C_2 C_3$ auf der zu a_4 parallelen Geraden s_4 , die von M den Abstand $R_4/2$ hat. s_4 ist die Simson-Gerade des Dreiecks $C_1 C_2 C_3$ bezüglich des auf seinem Umkreis

liegenden Punktes M . Da somit in den durch $MC_1C_2C_3$ und $MP_{23}P_{13}P_{12}$ festgelegten ähnlichen Feldern die Simson-Geraden s_4 und s einander entsprechen, so verhalten sich entsprechende Längen wie die Abstände des Punktes M von s_4 und s , also wie $R_4:2\mu$, oder wie die Umkreisradien $R_M:r_4$, woraus $R_M=r_4R_4/2\mu$ folgt.

Sind M und M_4 Gegenpunkte auf c_4 , so sind die Winkel $MP_{12}A_2$ und MM_4P_{23} als Peripheriewinkel über dem Bogen MP_{23} von c_4 gleich gross. Demnach sind die rechtwinkligen Dreiecke $MP_{12}A_2$ und MM_4P_{23} ähnlich, und es ist $r_4=MP_{12}\cdot MP_{23}/2R_2$. Die Winkel $MP_{12}A_2$ und MA_1O sind als Peripheriewinkel über dem Bogen MA_2 des Kreises mit dem Durchmesser MP_{12} gleich gross. Somit sind die rechtwinkligen Dreiecke $MP_{12}A_2$ und MA_1O ähnlich, und es ist $MP_{12}=R_1R_2/\mu$ und analog $MP_{23}=R_2R_3/\mu$. Aus den obigen Formeln erhält man zunächst $r_4=R_1R_2R_3/2\mu^2$ und schliesslich $R_M=R_1R_2R_3R_4/4\mu^3$. K. Grün, Linz (Donau), Österreich

Eine weitere Lösung sandte G. Bercea (München, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis **10. August 1975**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 672 A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724 A (Band 29, p. 99).

Aufgabe 733. Let n be a positive integer ≥ 2 . Let L be a line which intersects the $(n-1)$ -dimensional hyperplanes containing the $(n-1)$ -dimensional faces of a given n -dimensional simplex of vertices A_i ($i=1, \dots, n+1$) in the uniquely determined points B_i . Prove that the n -dimensional volume of the convex hull of the midpoints of $\overline{A_iB_i}$ is zero. This extends the known results for $n=2, 3$ for which the midpoints are collinear and coplanar, respectively.

M. S. Klamkin, Dearborn, Michigan, USA

Aufgabe 734. In einem ebenen Dreieck mit den Seiten a_i sei R der Umkreisradius und r der Inkreisradius. Man zeige, dass

$$\frac{9R}{r} - \frac{4r}{R} - \frac{2(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)}{a_1 a_2 a_3} \geq 10$$

mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck.

E. Braune, Linz, Donau, Österreich

Aufgabe 735. C bezeichne die Menge der komplexen Zahlen. Es sei $d \in C$ beliebig und φ die durch $\varphi(z) := (d-z)^{-1}$ erklärte Abbildung von $C \cup \{\infty\}$ in sich, wobei $\varphi(\infty) = 0$ und $\varphi(d) = \infty$ gelte. Man finde notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der durch

$$b_1 \in C \cup \{\infty\} \text{ beliebig; } b_{n+1} = \varphi(b_n) \quad (n \geq 1)$$

erklärten Folge von Elementen von $C \cup \{\infty\}$ und bestimme im Falle der Existenz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

J. Binz, Bern

Aufgabe 736. Man beweise, dass für jedes nichtkonstante Polynom f mit ganzzahligen Koeffizienten die Reihensumme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[f(n), \dots, f(1)]}$$

existiert und irrational ist, wobei bei der Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen $[f(n), \dots, f(1)]$ eventuelle Werte Null von f zu ignorieren sind.

P. Erdős, Budapest, Ungarn

Bericht

VIII. Österreichischer Mathematikerkongress

Wien, 17.–21. September 1973

Der Einladung zum VIII. Österreichischen Mathematikerkongress folgten diesmal rund 700 Mathematiker aus 28 Ländern; auch ein kleines Schweizerkontingent war vertreten. Der Kongress tagte in den Neubauten der Technischen Hochschule in Wien.

Die feierliche Eröffnung vollzog sich mit echt wienerischem Charme im Auditorium Maximum der Hochschule am Getreidemarkt: Den Damen wurde beim Betreten des Raumes eine Riesennelke überreicht, und zwischen den üblichen Begrüßungsansprachen spielte ein kleines Kammerorchester mit Schubertschen Tänzen auf. Schwerpunkt der Eröffnungsfeier war ein Vortrag des Vorsitzenden der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Prof. Dr. H. Stetter (TH Wien), über das Thema «Mathematik in der Gesellschaft von heute». In recht humorvollen und gewandten Worten versuchte Stetter eine Gegenüberstellung der Denkweisen in Bereichen der Mathematik und der Soziologie. Bei der Zunft der Soziologen – Stetter bezeichnete sie als die modernen Sittenrichter – zählt die Mathematik mit ihren harten Methoden bekanntlich zum schaurigen Instrumentarium der reaktionären Unterdrückung. Der Mathematikunterricht macht jedem Schüler vor, dass eine Aussage oder ein Ergebnis entweder richtig oder falsch ist. Aber wo käme man in den Augen der Soziologen hin, wenn solche Kriterien zum Maßstab erhoben würden? Beweist nicht jeder Politiker, dass es nur auf den Standpunkt ankommt, ob eine Aussage grandios oder verwerflich ist. Wo käme man hin, wenn man seine Formulierungen so sorgfältig und präzise wählen müsste, dass es nicht möglich wäre, am nächsten Tag zu behaupten, man habe genau das Gegenteil sagen wollen, man sei nur falsch verstanden worden. Prof. Stetter konnte auch noch eine weitere Forderung der Mathematik aufzeigen, die sich im modernen Getriebe recht altmodisch ausnimmt: Die Tatsache, dass eine Aussage auch bewiesen werden muss. Wo bliebe die dialektische Schulung, wo die rhetorische Überzeugungskraft, wenn die Angesprochenen nicht nur eindrucksvolle Worte, sondern stichhaltige Begründungen verlangten? Immer wieder muss man erleben, dass unbewiesene Behauptungen glaubhaft werden, wenn sie nur oft genug wiederholt werden. Der Mathematiker muss sich schliesslich auch noch die Frage gefallen lassen, ob die Gepflogenheiten in seinem Fach nicht in unmittelbarem Widerspruch zum demokratischen Grundprinzip der Gültigkeit von Mehrheitsentscheidungen stehen. Durch keine Abstimmung kann doch π zu einer rationalen Zahl erklärt werden. Das Verdammungsurteil der