

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 30 (1975)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Simultanbeweis des Fermatschen und Wilsonschen Satzes  
**Autor:** Stöwener, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-30647>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

und

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

kann man die noch einfachere Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

verwenden, wo  $\frac{1}{4}$  viermal vorkommt und allgemein  $\frac{1}{n}$   $n$ -mal vorkommt. Man erhält aus dieser sofort auch die einfache bedingt konvergente Reihe

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots,$$

wobei wieder  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n}$  genau  $n$ -mal angeschrieben werden soll. Dass eine bedingt konvergente Reihe bei einer Umordnung mit einer anderen Summe konvergent werden kann, bereitet dem Schüler Schwierigkeiten beim Verständnis, weil Beispiele dazu oft etwas kompliziert sind. Das folgende Beispiel scheint mir recht einfach zu sein. Offenbar hat die Reihe

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \cdots$$

die Summe Null. Ordnen wir sie ein wenig anders, so entsteht die Reihe

$$-1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \cdots$$

wo  $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}$  viermal angeschrieben werden soll und dann  $\frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16}$  achtmal usw. Diese Reihe hat offensichtlich die Summe  $(-1)$ , also eine Summe  $\neq 0$ . Natürlich ist es leicht, auch eine divergente Reihe zu erhalten:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

K. Prachar, Wien

### Simultanbeweis des Fermatschen und Wilsonschen Satzes

Der Fermatsche Satz  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  und die Wilsonsche Kongruenz  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$  gestatten einen einfachen gemeinsamen Beweis, der ihren inneren Zusammenhang durch eine interessante Identität (1) erkennen lässt.

Sei  $p$  eine Primzahl,  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  eine beliebige ganze Zahl und  $a_i = a/i$ ;  $1 \leq i \leq p-1$ . Dann gilt

$$a_1 (a_1 - a_2) (a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_{p-1}) \\ = \frac{a}{1} \frac{a(2-1)}{2} \frac{a(3-1)}{3} \dots \frac{a(p-2)}{p-1} = \frac{a^{p-1}}{p-1}$$

oder

$$[a_1 (a_1 - a_2) (a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_{p-1})] (p-1) = a^{p-1}. \quad (1)$$

Die  $p-1$  Faktoren in der eckigen Klammer sind mod  $p$  ganz und offensichtlich nicht durch  $p$  teilbar. Sie sind paarweise inkongruent, denn aus  $a_1 \equiv a_1 - a_x$  würde sich  $a_x \equiv 0$  und daraus  $a \equiv 0$  ergeben, und aus  $a_1 - a_x \equiv a_1 - a_y$  würde  $a_x \equiv a_y$  und daraus  $x \equiv y$  folgen. Das Produkt von  $p-1$  paarweise inkongruenten Faktoren, die nicht durch  $p$  teilbar sind, ist  $\equiv (p-1)!$ . Nach (1) gilt somit

$$-(p-1)! \equiv a^{p-1} \pmod{p}. \quad (2)$$

Die Kongruenz (2) gilt entsprechend unserer Voraussetzung für jede beliebige ganze Zahl  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Wegen  $1 \equiv 1^{p-1}$  folgt daher aus (2)

$$1 \equiv 1^{p-1} \equiv -(p-1)! \equiv a^{p-1} \pmod{p}.$$

Damit sind beide Titelsätze simultan bewiesen.

F. Stöwener, Mannheim

## Aufgaben

**Aufgabe 713.** Give a proof of

$$c(m, n) = \sum_{\substack{d|n \\ d|m}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d,$$

where

$$c(m, n) := \sum_{\substack{1 \leq h \leq n \\ (h, n) = 1}} \exp\left(\frac{2\pi i h m}{n}\right),$$

using only the formula

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

D. Suryanarayana, Waltair, India

*Lösung:* Wir gehen von der bekannten Formel

$$\sum_{k=1}^d \exp\left(2\pi i k \frac{m}{d}\right) = \begin{cases} d & \text{falls } d | m \\ 0 & \text{falls } d \nmid m \end{cases}$$