Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nach Gleichung (20) bilden $\{U\}$ und $\{V\}$ gegenläufige projektive Punktreihen in vereinigter Lage. Für die Gegenpunkte U_g und V_g der Projektivität ergeben sich die Ordinaten

$$\xi_g = 0 \quad \text{bzw.} \quad \eta_g = -\frac{2\varrho\,(6+m^2)}{m^2}. \tag{21}$$

Mit Hilfe von (21) erhält man für die Potenz dieser Projektivität

$$k^2 = 3\varrho^2 \tag{22}$$

und die Charakteristik der Projektivität

$$\delta = \frac{6+m^2-2\sqrt{G}}{6+m^2+2\sqrt{G}} \quad \text{mit} \quad G = 9+3m^2+m^4. \tag{23}$$

Mit den Ergebnissen (21) und (22) ist ein gut überschaubarer konstruktiver Zugang für jedes beliebige Punktepaar $\{U, V\}$ und damit auch für die Punktepaare $\{M, K_2\}$ gesichert (vgl. Abb. 6) (vgl. Sonderfall für Scheitelpunkte in [3]). Bei Vorgabe eines Kegelschnittes $\varkappa$ (etwa durch dessen Achsen) ist es mit diesen Mitteln möglich, die Krümmungsmittelpunkte K, K_1 und K_2 zu jedem beliebigen Punkt $P \in \varkappa$ zu konstruieren. Umgekehrt ist auch $\varkappa$ eindeutig konstruierbar, wenn zu einem Punkt $P \in \varkappa$ die Krümmungsmitten K, K_1 und K_2 vorgelegt sind.

Eberhard Schröder, Technische Universität Dresden, DDR

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. Strubecker, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie* (Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1958), S. 33.

[2] E. Kruppa, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Springer-Verlag, Wien 1957), S. 102.

[3] E. Schröder, *Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung* El. Math. *25*, 7–13 (1970).

Kleine Mitteilungen

Zero-divisors in a ring of arithmetic functions

In [1, p. 247], M. V. Subbarao introduced a convolution in the set S of all arithmetical functions, which he called 'exponential convolution' as follows:

$$(\alpha \circ \beta)(1) = \alpha(1)\,\beta(1),$$

$$(\alpha \circ \beta)(n) = \sum_{\substack{d_i \mid a_i \\ i=1,2,\ldots,r}} \alpha(p_1^{d_1} \cdots p_r^{d_r})\,\beta(p_1^{a_1/d_1} \cdots p_r^{a_r/d_r}),$$

if $\alpha, \beta \in S$ and $n > 1$ has the canonical representation $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$.

Among other things he proved the following result regarding the zero-divisors in the ring $(S, +, \circ)$:

A necessary condition for $\alpha \in S$ to be a non-zero-divisor is that given any finite number of primes $p_1, \cdots, p_r$, there exist positive integers $a_1, a_2, \cdots, a_r$ such that $\alpha(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) \neq 0$.

Whether the above condition is also sufficient for a non-zero-divisor *was left as an open question* [1, p. 259].

In this note we prove that if $\alpha(1) \neq 0$, then the above condition is sufficient for α to be a non-zero-divisor. This is contained in the following.

Theorem. If $\alpha(1) \neq 0$ and α is a zero-divisor in $(S, +, \circ)$, then there exist primes $p_1, \cdots, p_r$ such that $\alpha(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) = 0$ for all positive integers $a_1, \cdots, a_r$.

Proof. Let $\boldsymbol{N}$ denote the set of all positive integers. Since α is a zero-divisor, there exists a β in S with $\beta \neq 0$ such that

$$(\alpha \circ \beta)(n) = 0 \quad \text{for all} \quad n \in \boldsymbol{N} \tag{A}$$

Since $\beta \neq 0$, there is an $m \in \boldsymbol{N}$ such that $\beta(m) \neq 0$. Since $\alpha(1)\,\beta(1) = 0$ and $\alpha(1) \neq 0$, we must have $\beta(1) = 0$. Consequently $m > 1$. Let

$$m = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$$

be the canonical representation of m. We now claim that with these $p_1, \cdots, p_r$:

$$\alpha(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) = 0 \quad \text{for all positive integers} \quad a_1, \cdots, a_r\,. \tag{B}$$

We suppose that (B) is false and obtain a contradiction. If (B) is false, then the set

$$U = \{(b_1, \ldots, b_r) \in \boldsymbol{N}^r \mid \alpha(p_1^{b_1} \ldots p_r^{b_r}) \neq 0\}$$

is a non-empty subset of the well-ordered set $\boldsymbol{N}^r$ (under the lexicographic ordering) and hence has the least element say $(c_1, \cdots, c_r)$. Write

$$T = \{(f_1, \ldots, f_r) \in \boldsymbol{N}^r \mid \beta(p_1^{f_1} \ldots p_r^{f_r}) \neq 0\}.$$

Then since $\beta(p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}) \neq 0$, it follows that T is a non-empty subset of the well ordered set $\boldsymbol{N}^r$ (again under the lexicographic ordering) and hence has a least element say $(e_1, \cdots, e_r)$. Now from (A),

$$0 = (\alpha \circ \beta)(p_1^{c_1 e_1} \ldots p_r^{c_r e_r}) = \sum_{\substack{d_i \mid c_i e_i \\ i = 1, 2, \ldots, r}} \alpha(p_1^{d_1} \ldots p_r^{d_r})\, \beta(p_1^{c_1 e_1/d_1} \ldots p_r^{c_r e_r/d_r})\,.$$

In the above sum terms for which $d_1 < c_1$ vanish because of the minimum character of $(c_1, \cdots, c_r)$; similarly terms for which $d_1 > c_1$ vanish owing to the minimum property of $(e_1, \cdots, e_r)$. Thus we will be left with only terms for which $d_1 = c_1$. Now clearly the only non-vanishing terms will be corresponding to $d_2 = c_2$. Continuing this argument, we get from (C) the contradiction

$$0 = \alpha(p_1^{c_1} \ldots p_r^{c_r})\, \beta(p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r})\,.$$

Thus (B) must be true.

We finally remark that the above theorem need not hold if $\alpha(1) = 0$ as is shown by the following example.

Example. Let $\alpha, \beta \in S$ be defined as follows:

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad n = 1 \\ \mu(n) & \text{if} \quad n > 1 \ (\mu \text{ Möbiusfunction}) \end{cases} \qquad \beta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 1 \\ 0 & \text{for} \quad n > 1 \end{cases}$$

then clearly $\alpha \circ \beta = 0$ so that α is a zero-divisor. But for any finite number of primes $p_1, \dots, p_r$,

$$\alpha(p_1 \cdots p_r) = \mu(p_1 \cdots p_r) = (-1)^r \neq 0 .$$

A. S. Sastry, Waltair, India

REFERENCE

[1] M. V. Subbarao, *On some arithmetic convolutions, Lecture notes in Mathematics*, Vol. 251, Springer-Verlag, p. 247–271 (1972).

Aufgaben

Aufgabe 717. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Man beweise: Die Schar aller jener Kreise, deren Mittelpunkte P auf einer Sehne s von k liegen und deren Radien durch die Potenzstrecke von P bezüglich k

$$(= \sqrt{r^2 - MP^2} \geq 0)$$

gegeben sind, wird von einer Ellipse eingehüllt. W. Kienberger, Graz, Österreich

Lösung: Wir wählen ein cartesisches Koordinatensystem (X, Y) mit M als Ursprung so, dass die Sehne s parallel zur X-Achse ist; ihr Abstand von der X-Achse sei a. Es sei $P = (x, a) \in s$. Dann gilt $\overline{MP}^2 = a^2 + x^2$. Die Gleichung der Kreislinie um P mit Radius $\sqrt{r^2 - \overline{MP}^2}$ ist dann

$$f(X, Y; x) = (X - x)^2 + (Y - a)^2 - (r^2 - a^2 - x^2) = 0 . \tag{1}$$

Die Gleichung der Umhüllenden von (1) erhält man durch Auflösung des Gleichungssystems

$$f(X, Y; x) = 0 \tag{2}$$

$$f_x(X, Y; x) = 2(x - X) + 2x = 0 , \tag{3}$$

wobei x als Parameter der betrachteten Schar auftritt.
Aus (3) und (2) mit (1) folgt dann:

$$2\left(\frac{X}{2}\right)^2 + (Y - a)^2 = r^2 - a^2 . \tag{4}$$

Die Umhüllende ist folglich eine Ellipse.