

Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Nach Gleichung (20) bilden $\{U\}$ und $\{V\}$ gegenläufige projektive Punktreihen in vereinigter Lage. Für die Gegenpunkte U_g und V_g der Projektivität ergeben sich die Ordinaten

$$\xi_g = 0 \quad \text{bzw.} \quad \eta_g = -\frac{2\rho(6+m^2)}{m^2}. \quad (21)$$

Mit Hilfe von (21) erhält man für die Potenz dieser Projektivität

$$k^2 = 3\rho^2 \quad (22)$$

und die Charakteristik der Projektivität

$$\delta = \frac{6+m^2-2\sqrt{G}}{6+m^2+2\sqrt{G}} \quad \text{mit} \quad G = 9+3m^2+m^4. \quad (23)$$

Mit den Ergebnissen (21) und (22) ist ein gut überschaubarer konstruktiver Zugang für jedes beliebige Punktepaar $\{U, V\}$ und damit auch für die Punktepaare $\{M, K_2\}$ gesichert (vgl. Abb. 6) (vgl. Sonderfall für Scheitelpunkte in [3]). Bei Vorgabe eines Kegelschnittes κ (etwa durch dessen Achsen) ist es mit diesen Mitteln möglich, die Krümmungsmittelpunkte K, K_1 und K_2 zu jedem beliebigen Punkt $P \in \kappa$ zu konstruieren. Umgekehrt ist auch κ eindeutig konstruierbar, wenn zu einem Punkt $P \in \kappa$ die Krümmungsmittelpunkte K, K_1 und K_2 vorgelegt sind.

Eberhard Schröder, Technische Universität Dresden, DDR

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. STRUBECKER, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie* (Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1958), S. 33.
- [2] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Springer-Verlag, Wien 1957), S. 102.
- [3] E. SCHRÖDER, *Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung* *El. Math.* 25, 7–13 (1970).

Kleine Mitteilungen

Zero-divisors in a ring of arithmetic functions

In [1, p. 247], M. V. Subbarao introduced a convolution in the set S of all arithmetical functions, which he called 'exponential convolution' as follows:

$$(\alpha \circ \beta)(1) = \alpha(1) \beta(1),$$

$$(\alpha \circ \beta)(n) = \sum_{\substack{d_i | a_i \\ i=1, 2, \dots, r}} \alpha(p_1^{d_1} \dots p_r^{d_r}) \beta(p_1^{a_1/d_1} \dots p_r^{a_r/d_r}),$$

if $\alpha, \beta \in S$ and $n > 1$ has the canonical representation $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$.

Among other things he proved the following result regarding the zero-divisors in the ring $(S, +, \circ)$:

A necessary condition for $\alpha \in S$ to be a non-zero-divisor is that given any finite number of primes p_1, \dots, p_r , there exist positive integers a_1, a_2, \dots, a_r such that $\alpha(p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}) \neq 0$.

Whether the above condition is also sufficient for a non-zero-divisor was left as an open question [1, p. 259].

In this note we prove that if $\alpha(1) \neq 0$, then the above condition is sufficient for α to be a non-zero-divisor. This is contained in the following.

Theorem. If $\alpha(1) \neq 0$ and α is a zero-divisor in $(S, +, \circ)$, then there exist primes p_1, \dots, p_r such that $\alpha(p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}) = 0$ for all positive integers a_1, \dots, a_r .

Proof. Let N denote the set of all positive integers. Since α is a zero-divisor, there exists a β in S with $\beta \neq 0$ such that

$$(\alpha \circ \beta)(n) = 0 \quad \text{for all } n \in N \tag{A}$$

Since $\beta \neq 0$, there is an $m \in N$ such that $\beta(m) \neq 0$. Since $\alpha(1)\beta(1) = 0$ and $\alpha(1) \neq 0$, we must have $\beta(1) = 0$. Consequently $m > 1$. Let

$$m = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$$

be the canonical representation of m . We now claim that with these p_1, \dots, p_r :

$$\alpha(p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}) = 0 \quad \text{for all positive integers } a_1, \dots, a_r. \tag{B}$$

We suppose that (B) is false and obtain a contradiction. If (B) is false, then the set

$$U = \{(b_1, \dots, b_r) \in N^r \mid \alpha(p_1^{b_1} \dots p_r^{b_r}) \neq 0\}$$

is a non-empty subset of the well-ordered set N^r (under the lexicographic ordering) and hence has the least element say (c_1, \dots, c_r) . Write

$$T = \{(f_1, \dots, f_r) \in N^r \mid \beta(p_1^{f_1} \dots p_r^{f_r}) \neq 0\}.$$

Then since $\beta(p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}) \neq 0$, it follows that T is a non-empty subset of the well ordered set N^r (again under the lexicographic ordering) and hence has a least element say (e_1, \dots, e_r) . Now from (A),

$$0 = (\alpha \circ \beta)(p_1^{c_1 e_1} \dots p_r^{c_r e_r}) = \sum_{\substack{d_i \mid c_i e_i \\ i=1,2,\dots,r}} \alpha(p_1^{d_1} \dots p_r^{d_r}) \beta(p_1^{c_1 e_1/d_1} \dots p_r^{c_r e_r/d_r}).$$

In the above sum terms for which $d_1 < c_1$ vanish because of the minimum character of (c_1, \dots, c_r) ; similarly terms for which $d_1 > c_1$ vanish owing to the minimum property of (e_1, \dots, e_r) . Thus we will be left with only terms for which $d_1 = c_1$. Now clearly the only non-vanishing terms will be corresponding to $d_2 = c_2$. Continuing this argument, we get from (C) the contradiction

$$0 = \alpha(p_1^{c_1} \dots p_r^{c_r}) \beta(p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}).$$

Thus (B) must be true.

We finally remark that the above theorem need not hold if $\alpha(1) = 0$ as is shown by the following example.

Example. Let $\alpha, \beta \in S$ be defined as follows:

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ \mu(n) & \text{if } n > 1 \text{ } (\mu \text{ M\"obiusfunktion}) \end{cases} \quad \beta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{for } n > 1 \end{cases}$$

then clearly $\alpha \circ \beta = 0$ so that α is a zero-divisor. But for any finite number of primes p_1, \dots, p_r ,

$$\alpha(p_1 \cdots p_r) = \mu(p_1 \cdots p_r) = (-1)^r \neq 0.$$

A. S. Sastry, Waltair, India

REFERENCE

- [1] M. V. SUBBARAO, *On some arithmetic convolutions, Lecture notes in Mathematics*, Vol. 251, Springer-Verlag, p. 247-271 (1972).

Aufgaben

Aufgabe 717. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Man beweise: Die Schar aller jener Kreise, deren Mittelpunkte P auf einer Sehne s von k liegen und deren Radien durch die Potenzstrecke von P bezüglich k

$$(\text{= } \sqrt{r^2 - MP^2} \geq 0)$$

gegeben sind, wird von einer Ellipse eingehüllt. W. Kienberger, Graz, Österreich

Lösung: Wir wählen ein cartesisches Koordinatensystem (X, Y) mit M als Ursprung so, dass die Sehne s parallel zur X -Achse ist; ihr Abstand von der X -Achse sei a . Es sei $P = (x, a) \in s$. Dann gilt $\overline{MP^2} = a^2 + x^2$. Die Gleichung der Kreislinie um P mit Radius $\sqrt{r^2 - \overline{MP^2}}$ ist dann

$$f(X, Y; x) = (X - x)^2 + (Y - a)^2 - (r^2 - a^2 - x^2) = 0. \quad (1)$$

Die Gleichung der Umhüllenden von (1) erhält man durch Auflösung des Gleichungssystems

$$f(X, Y; x) = 0 \quad (2)$$

$$f_x(X, Y; x) = 2(x - X) + 2x = 0, \quad (3)$$

wobei x als Parameter der betrachteten Schar auftritt.

Aus (3) und (2) mit (1) folgt dann:

$$2 \left(\frac{X}{2} \right)^2 + (Y - a)^2 = r^2 - a^2. \quad (4)$$

Die Umhüllende ist folglich eine Ellipse.