

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 30 (1975)
Heft: 5

Artikel: Die Vierfach-Spiegelungen an Geraden
Autor: Botsch, Otto
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-30653>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der gesuchte Winkel $\alpha = \sphericalangle TAS$ ergibt sich dann aus $\operatorname{tg} \alpha = \overline{ST}/\overline{AS} = y_2 z_1 / x_1$, also mit Rücksicht auf (6) aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}. \quad (15)$$

Unter Hinzunahme der analogen Formel $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{th} b / \operatorname{sh} a$ können dann alle übrigen Relationen im rechtwinkligen Dreieck ABC gefolgert werden. Sie lassen sich bekanntlich in einer modifizierten «Neperschen Regel» zusammenfassen [3].

W. Wunderlich, Technische Hochschule Wien

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. BALDUS-F. LÖBELL: *Nichteuklidische Geometrie* (Sammlg. Göschen, Bd. 970/970 a). 4. Aufl. (Berlin 1964).
- [2] F. KLEIN-H. ROSEMAN: *Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie* (Grundlehren d. math. Wiss., Bd. 28). (Berlin), 3. Aufl. 1928, Nachdruck 1968.
- [3] H. MESCHKOWSKI: *Nichteuklidische Geometrie*. 4. Aufl. (Braunschweig 1971). – Siehe auch: *Die Ableitung der trigonometrischen Formeln im Poincaréschen Modell der hyperbolischen Geometrie*. *El. Math.* 7, 130–132 (1952).
- [4] H. ZEITLER: *Hyperbolische Geometrie* (Beiträge f. d. math. Unterr., Bd. 3). (München 1970).

Die Vierfach-Spiegelungen an Geraden

Das Produkt von vier Spiegelungen an Geraden der Ebene ergibt bekanntlich entweder eine Translation τ oder eine Rotation ρ (vgl. [1] S. 41). Anstelle der üblichen, stark aufgesplitterten Fall-Untersuchung zum Nachweis vorstehender Behauptung werden wir im Folgenden eine allgemeine Beweisführung bringen.

Es werde vorausgeschickt, dass der gerichtete Winkel $\omega(a, \vec{b})$ zwischen zwei Geraden a, b modulo 180° zu verstehen ist und dass Vertauschung der Geraden Umkehr des Vorzeichens bedingt:

$$\omega(a, \vec{b}) = -\omega(\vec{b}, a). \quad (1)$$

Einander schneidende Geraden bilden von Null verschiedene Winkel. Will man daher von einem *Winkel zwischen zwei Parallelen* sprechen, so hat man diesem die Grösse $0^\circ \bmod 180^\circ$ beizulegen. In Ergänzung von (9) [1] gelten daher die Äquivalenzen:

$$a \parallel b \Leftrightarrow \sigma_a \cdot \sigma_b = \tau \Leftrightarrow \omega(a, \vec{b}) = 0^\circ \bmod 180^\circ \quad (2)$$

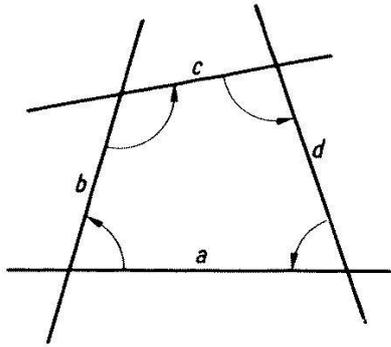
Für vier Geraden a, b, c, d eines Büschels gilt:

$$\omega(\vec{a}, \vec{b}) + \omega(\vec{b}, \vec{c}) + \omega(\vec{c}, \vec{d}) + \omega(\vec{d}, \vec{a}) = 0^\circ \bmod 180^\circ. \quad (3)$$

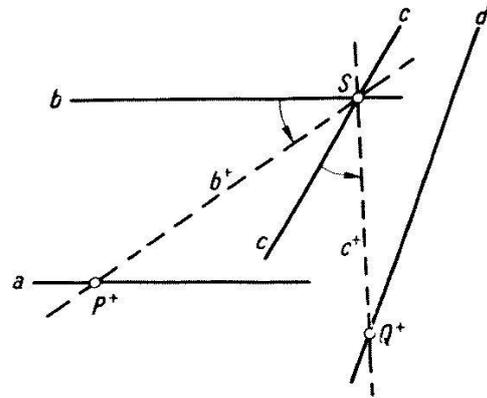
Verschiebt man eine oder einige der Geraden parallel zu sich, so entsteht ein Viereck, für dessen Winkel (wegen der Winkelsätze für Parallelen) ebenfalls Gleichung (3) gilt (Fig. 1).

Unser Beweisgang schliesst unmittelbar an Fig. 2 von [1] an. Ist kein Schnittpunkt P von a, b vorhanden, wohl aber ein Schnittpunkt S von b, c , so kann man in weitem Belieben zwei neue Geraden b^+, c^+ des Büschels S derart wählen, dass sie a bzw. d in Punkten P^+ bzw. Q^+ schneiden, während ihr Winkel erhalten bleibt, d. h.

$$\overrightarrow{\omega}(b^+, c^+) = \overrightarrow{\omega}(b, c). \quad (\text{Fig. 2})$$



Figur 1



Figur 2

Für die neue Konfiguration a, b^+, c^+, d gilt nach (14), (15) [1]:

$$\beta = \sigma_a \cdot \sigma_{b^+} \cdot \sigma_{c^+} \cdot \sigma_d = \sigma_{a'} \cdot \sigma_{d'} \quad (4)$$

und wegen $\sigma_{b^+} \cdot \sigma_{c^+} = \sigma_b \cdot \sigma_c$:

$$\beta = \sigma_a \cdot \sigma_{b^+} \cdot \sigma_{c^+} \cdot \sigma_d = \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c \cdot \sigma_d = \sigma_{a'} \cdot \sigma_{d'} \quad (4')$$

Nennt man die Ersatz-Achsen a', d' neutraler j, k , so gilt daher:

$$\beta = \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c \cdot \sigma_d = \sigma_j \cdot \sigma_k \quad \text{mit:} \quad \overrightarrow{\omega}(j, k) = \overrightarrow{\omega}(a, b) + \overrightarrow{\omega}(c, d). \quad (5)$$

Die Gleichung (5) gilt nicht nur für den in [1] betrachteten Sonderfall, dass ein Schnittpunkt P von a, b vorhanden ist. Der Beweisgang kann durch Einschalten von Hilfsgeraden sinngemäss in allen Fällen durchgeführt werden, wenn wenigstens *ein* Schnittpunkt benachbarter Geradenpaare (a, b) , (b, c) oder (c, d) vorhanden ist.

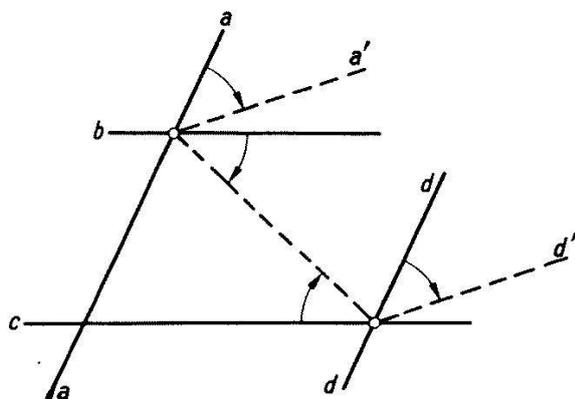
Dagegen versagt der Beweis, falls alle vier Geraden zueinander parallel sind: $a \parallel b \parallel c \parallel d$. Dann gibt es aber nach [1], (13) eine Achse $x \parallel d$ mit $\sigma_a \cdot \sigma_b = \sigma_x \cdot \sigma_c$ oder:

$$\sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c = \sigma_x \quad \text{daher:} \quad \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c \cdot \sigma_d = \sigma_x \cdot \sigma_d = \tau \quad \text{und wegen} \quad \overrightarrow{\omega}(a, b) = \overrightarrow{\omega}(c, d) \\ = \overrightarrow{\omega}(x, d) = 0^\circ \text{ mod } 180^\circ \text{ ebenfalls Gültigkeit der Gleichung (5).}$$

Die Frage, in welchen Fällen eine Vierfach-Spiegelung keine Rotation, sondern eine Translation darstellt, wird nach Gleichung (5) sehr einfach beantwortet:

a) Sind die beiden ersten und die beiden letzten Geraden parallel d. h. $\overrightarrow{\omega}(a, b) = \overrightarrow{\omega}(c, d) = 0^\circ \text{ mod } 180^\circ$ so folgt dies nach (5) auch für $\overrightarrow{\omega}(j, k)$. Es handelt sich um den bekannten Fall der Komposition zweier Translationen.

b) Sind die beiden äusseren und die beiden inneren Geraden parallel, so folgt aus $\vec{\omega}(b, c) = \vec{\omega}(d, a) = 0^\circ \text{ mod } 180^\circ$ nach (3): $\vec{\omega}(a, b) + \vec{\omega}(c, d) = 0^\circ \text{ mod } 180^\circ$ (Fig. 3).



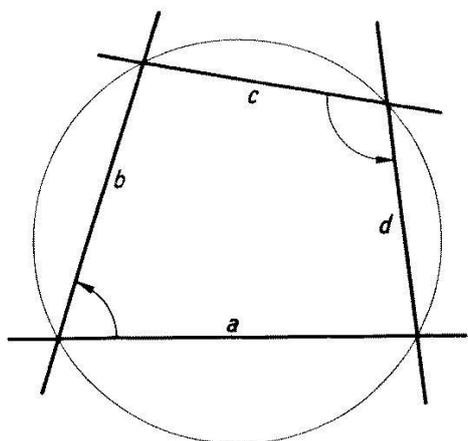
Figur 3

Dabei ist $\beta = \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c \cdot \sigma_d$ nichts anderes als die an a gespiegelte, durch a) erwiesene Translation $\tau = \sigma_b \cdot \sigma_c \cdot \sigma_d \cdot \sigma_a$, nämlich $\beta = \sigma_a \cdot \tau \cdot \sigma_a$.

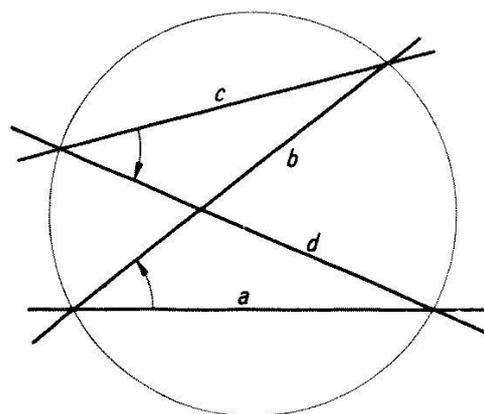
c) Sind die Summen der Winkel zwischen den beiden ersten und den beiden letzten Geraden $0^\circ \text{ mod } 180^\circ$, so folgt dies nach (3) nicht nur auch für die Summen der Winkel zwischen den äusseren und den inneren Geraden, sondern unmittelbar für

$$\vec{\omega}(j, k) = \vec{\omega}(a, b) + \vec{\omega}(c, d) = \vec{\omega}(b, c) + \vec{\omega}(d, a) = 0^\circ \text{ mod } 180^\circ .$$

Als Sonderfall von c) ergibt sich die bekannte Komposition von zwei Punktspiegelungen mit $\vec{\omega}(a, b) = \vec{\omega}(c, d) = 90^\circ \text{ mod } 180^\circ$. Allgemein enthält c) den unseres Wissens noch unbekanntes



Figur 4



Figur 5

Satz: *Bilden die vier Achsen von Spiegelungen ein Sehnenviereck, so ist das Vierfach-Produkt der Spiegelungen eine Translation.*

Otto Botsch, Heidelberg

LITERATURVERZEICHNIS

[1] O. BOTSCH, *Ein reduziertes Erzeugenden-System der Kongruenzgruppe in der Ebene*, El. Math. 29, 39 (1974).