Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 2

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 737. (Für die Zwecke dieser Aufgabe wird 1 zu den Primzahlen gerechnet.) Eine Nichtprimzahl k heisse eine P-Zahl, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Jede Primzahl lässt, durch k dividiert, als kleinsten positiven Rest wieder eine Primzahl. Man bestimme alle P-Zahlen. P. Wilker, Bern

Lösung: Es sei $\mathbf{P}$ die Menge der Primzahlen, $\mathbf{P}^* = \mathbf{P} \cup \{1\}$, $k \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{P}^*$, P_k die Menge der Elemente von $\mathbf{P}^*$ mit der Eigenschaft, dass ihr kleinster positiver Rest (mod. k) in $\mathbf{P}^*$ liegt. Gesucht sind alle k mit $P_k = \mathbf{P}^*$.

Beh.: Die Aussage (A): $P_k = \mathbf{P}^*$ ist äquivalent mit der Aussage (B): Die kleinste positive Zahl jeder teilerfremden Restklasse (mod. k) liegt in $\mathbf{P}^*$.

Beweis: 1. (B) folgt aus (A), weil jede teilerfremde Restklasse (mod. k) Primzahlen enthält (sogar unendlich viele nach Dirichlet). 2. (A) folgt aus (B). Denn zerlegt man $\mathbf{P}^*$ in die Teilmengen $\mathbf{P}_1^*$ und $\mathbf{P}_2^*$, wo $\mathbf{P}_1^*$ genau aus den Primteilern von k besteht und $\mathbf{P}_2^*$ alle übrigen Elemente von $\mathbf{P}^*$ enthält, so gehört jede Primzahl von $\mathbf{P}_1^*$ trivialerweise zu P_k; ferner liegt jede Primzahl aus $\mathbf{P}_2^*$ in einer (mod. k) teilerfremden Restklasse, d.h. sie gehört auf Grund der Voraussetzung (B) ebenfalls zu P_k. Somit sind alle Elemente von $\mathbf{P}^*$ Elemente von P_k, w.z.b.w.

Die vorgelegte Aufgabe ist daher gleichbedeutend mit der Aufgabe, alle k zu finden, für die (B) erfüllt ist. Dies ist ein bekanntes Problem der elementaren Zahlentheorie; eine ausführliche und elementare Lösung findet man z.B. bei Rademacher-Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren*, Thema 22. Aus dem dort hergeleiteten Ergebnis folgt: Die gesuchten P-Zahlen sind 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

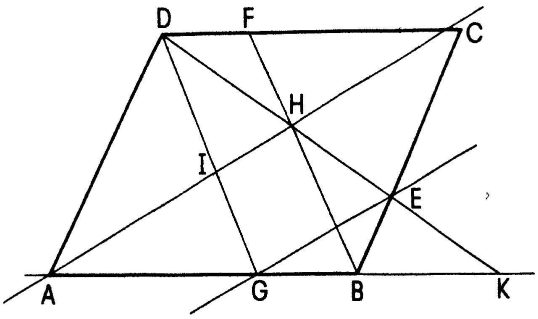
O. Buggisch, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten R. Acampora (Zürich), C. Bindschedler (Küsnacht ZH), J. Binz (Bolligen BE; zwei Lösungen), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD; zwei Lösungen), P. Hohler (Olten), L. Kuipers (Mollens VS), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Ch. Meier (Bern), Chr. A. Meyer (Bern), I. Paasche (München, BRD; zwei Lösungen), J. Schmid (Pasadena, California, USA), Hj. Stocker (Wädenswil ZH), K. Stoop (Bern), M. Straub (Karlsruhe, BRD), M. Vowe (Therwil BL), H. Warncke (Porto Alegre, Brasilien) und R. Wyss (Flumenthal SO).

Aufgabe 738. a) Es sei ein Parallelogramm $ABCD$ gegeben, und E, F bezeichnen Punkte auf BC bzw. CD. Die Parallele durch D zu FB schneide AB im Punkt G. Der Schnittpunkt von DE mit BF sei H. Man zeige, dass AH und GE parallel sind. (Keine analytische Lösung!)

b) Man beweise mit Hilfe von a) den bekannten Satz, dass ein Dreieck mit zwei gleichlangen Winkelhalbierenden gleichschenklig sei. G. Bercea, München, BRD

Lösung:



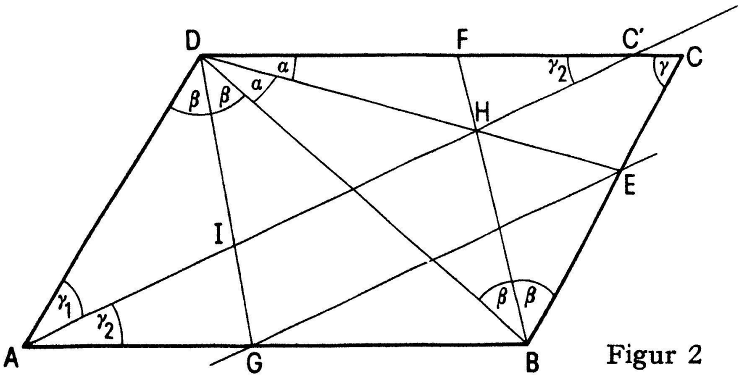
Figur 1

a) Die Gerade von DE schneide AB in K; DG schneide AH in I (siehe Figur 1). Der 2. Strahlensatz liefert: $\overline{AG}/\overline{AB} = \overline{GI}/\overline{HB}$; $\overline{KH}/\overline{KD} = \overline{KB}/\overline{KG} = \overline{HB}/\overline{DG}$; $\overline{KB}/\overline{KA} = \overline{KE}/\overline{KD}$. Ausserdem gilt: $\overline{AG} = \overline{KA} - \overline{KG}$ und $\overline{AB} = \overline{KA} - \overline{KB}$.

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{DG} - \overline{GI}}{\overline{DG}} = 1 - \frac{\overline{GI}}{\overline{DG}} = 1 - \frac{\overline{AG}\,\overline{HB}}{\overline{AB}\,\overline{DG}} = 1 - \frac{\overline{AG}\,\overline{KB}}{\overline{AB}\,\overline{KG}} =$$

$$\frac{(\overline{KA} - \overline{KB})\overline{KG} - (\overline{KA} - \overline{KG})\overline{KB}}{\overline{AB}\,\overline{KG}} = \frac{\overline{KA}(\overline{KG} - \overline{KB})}{\overline{AB}\,\overline{KG}} = \frac{1 - \overline{KB}/\overline{KG}}{1 - \overline{KB}/\overline{KA}}$$

$$= \frac{1 - \overline{KH}/\overline{KD}}{1 - \overline{KE}/\overline{KD}} = \frac{\overline{KD} - \overline{KH}}{\overline{KD} - \overline{KE}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DE}}$$; damit ist nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes AH parallel zu GE.



Figur 2

b) (siehe Figur 2). Das zu untersuchende Dreieck möge DBC bzw. das dazu kongruente DBA sein. Die gleichlangen Winkelhalbierenden seien $\overline{DE}$ und $\overline{FB}$ bzw. $\overline{DG}$. Sei $\sphericalangle\, ADB = \sphericalangle\, DBC = 2\beta$ und $\sphericalangle\, BDC = 2\alpha$; zu zeigen: $\alpha = \beta$.
Da nach a) AH parallel GE und nach Voraussetzung $\overline{DG} = \overline{DE}$, ist $\overline{DH} = \overline{DI}$, $\Delta\, DIH$ gleichschenklig und $\sphericalangle\, DIH = \sphericalangle\, DHI = (1/2)\,(\alpha + \beta + \gamma)$.
Sei C' der Schnittpunkt von AH mit der Geraden DC. $\sphericalangle\, BAC' = \sphericalangle\, DC'A = \gamma_2$ und $\sphericalangle\, DAC' = \gamma_1$.
Im Dreieck DIC' ergibt sich mit der Winkelsumme $\gamma_2 = (1/2)\,(\gamma + \beta - \alpha)$. O.B.d.A. sei $\beta > \alpha$, d.h. $\overline{AD} < \overline{AB}$ und $\overline{HB} < \overline{DH} = \overline{DI}$, $\gamma_2 > \gamma/2$, $\gamma_1 < \gamma/2$, also $\gamma_1 < \gamma_2$. Somit ist $\overline{DC'} < \overline{AD} < \overline{AB} = \overline{DC}$, also $\overline{DC'} < \overline{DC}$.

Da $\Delta\, AIG \sim \Delta\, FHC'$, folgt $\overline{AG}/\overline{IG} = \overline{FC'}/\overline{FH}$ und (da $\overline{AG} = \overline{FC}$) $\overline{FC}/\overline{FC'} = \overline{IG}/\overline{FH}$, also $\overline{FH} < \overline{IG}$.
Damit haben wir $\overline{FB} = \overline{HB} + \overline{FH} < \overline{DI} + \overline{FH} < \overline{DI} + \overline{IG} = \overline{DG}$, im Widerspruch zur Voraussetzung; also ist $\alpha = \beta$. M. Vowe, Therwil BL

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), J. T. Groenman (Groningen, Niederlande), K. Grün (Linz, Österreich), L. Kuipers (Mollens VS) und O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande).

Aufgabe 739. Es seien M eine endliche Menge und f eine Abbildung von M in sich. Ferner seien k die kleinste natürliche Zahl mit $f^k(M) = f^{k+1}(M)$ und i die kleinste natürliche Zahl mit $f^{i+1} \in \{f, f^2, \ldots, f^i\}$. Setzt man $f^k(M) = X$, so ist die Einschränkung g von f auf X eine Permutation von X. Man beweise: Ist r die Ordnung von g, so gilt $i = k + r - 1$ und $f^{i+1} = f^k$. H. Lüneburg, Kaiserslautern, BRD

Lösung: Für $s \leq k$ gilt $f^{s-1}(M) \supset f^s(M)$, und es gibt somit $x_0 \in M$ mit $f^{s-1}(x_0) = y_0 \notin f^s(M)$ und $f^s(x_0) = f(y_0) \in f^s(M)$; dies zieht automatisch nach sich, dass auch x_0, $f(x_0), \ldots, f^{s-2}(x_0)$ nicht zu $f^s(M)$ gehören.
Somit gilt $f^s \notin \{f, f^2, \ldots, f^{s-1}\}$.
f^k und somit auch f^{k+s} $(s \geq 1)$ sind surjektive Abbildungen von M auf X. f^{k+s} lässt sich in $g^s{}_0\, f^k$ zerlegen, wo g als Restriktion von f auf X bijektiv ist. Da $g, g^2, \ldots, g^{r-1}$ paarweise verschieden sind, sind auch die f^{k+s} $(1 \leq s \leq r-1)$ untereinander und trivialerweise von den f^s $(1 \leq s \leq k)$ verschieden. Wegen $g^r = id_X$ gilt erstmals für $s = r$ $f^{k+r} \in \{f, f^2, \ldots, f^{k+r-1}\}$. Damit wird $i = k + r - 1$ und $f^{k+r} = f^{i+1} = f^k$.
J. Binz, Bolligen BE

Weitere Lösungen sandten R. Fischer (Klagenfurt, Österreich), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande) und Chr. A. Meyer (Bern).

Aufgabe 740. a) Dans un quadrilatère complet formé par les droites a_1, a_2, a_3, a_4, les tangentes en A_{12} aux cercles (α_3) et (α_4) [(α_i) cercle circonscrit au triangle obtenu en supprimant la droite a_i] rencontrent les droites a_3, a_4 respectivement en des points $R_{A_{12}(\alpha_3)a_3}$ et $R_{A_{12}(\alpha_4)a_4}$ qui sont situés sur le cercle $A_{12}MA_{34}$ [M (point de Miquel), le point commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles que l'on peut former avec les quatre côtés].

b) Les cercles $A_{12}MA_{34}$, $A_{13}MA_{24}$, $A_{14}MA_{23}$ coupent chacun en un second point différent de M les «droites de Steiner» Δ et Γ [lignes des centres respectifs des deux groupes de cercles de Steiner et des deux groupes de trois cercles (δ_1), (δ_2), (δ_3) et (γ_1), (γ_2), (γ_3), dont les combinaisons d'équations indiquées en Aufgabe 415 a) fournissent les équations des cercles de Steiner proprement dits]. δ_1, δ_2, δ_3 et γ_1, γ_2, γ_3 désignant respectivement les seconds points d'intersection des trois cercles $A_{12}MA_{34}, \ldots$ avec les droites Δ et Γ, les droites $\delta_1\gamma_1$, $\delta_2\gamma_2$, $\delta_3\gamma_3$ qui joignent les points situés sur un même cercle sont les médiatrices de $A_{12}A_{34}$, $A_{13}A_{24}$ et $A_{14}A_{23}$, et les six points $\delta_1, \delta_2, \delta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont les centres des cercles (δ_1), (δ_2), (δ_3); (γ_1), (γ_2), (γ_3).

c) Les tangentes en

A_{23} au cercle (α_1), en A_{13} au cercle (α_2), en A_{12} au cercle (α_3)

concourent en z_4 sur (α_4). J. Quoniam, St-Etienne, France

Solution par l'auteur:

a) Les tangentes des angles

$$\overbrace{\underbrace{M;\ RA_{12(\alpha_3)a_3};\ RA_{12(a_4)\alpha_4};\ RA_{34(a_1)a_1};\ RA_{34(\alpha_2)a_2}}_{A_{34}}}^{A_{12}}$$

sont toutes égales en valeur absolue à

$$\left|\frac{\mu^3\,\Sigma\alpha - \mu\,\Sigma\alpha\beta\gamma + 2\mu\,(\gamma+\delta)\,(\alpha\beta-\mu^2)}{\mu^2\,\Sigma\alpha\beta + \Pi + \mu^4 - 2\mu^2\,(\alpha\beta+\gamma\delta)}\right|.$$

b) L'équation du cercle $A_{12}MA_{34}$ peut se mettre sous la forme:

$$\Delta_{\alpha\beta}\cdot(x^2+y^2) - \Phi_{\alpha\beta}\cdot x - \Psi_{\alpha\beta}\cdot y - \chi_{\alpha\beta} = 0$$

avec:

$$-2\mu\Delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu^3}\{2\mu^3(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta-\beta\gamma\delta) + 2\mu^5(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu^3}\{\Pi\,(\alpha\beta-\gamma\delta) + \mu^2(\alpha^2\gamma\delta+\beta^2\gamma\delta+\gamma^2\delta^2-\alpha\beta\gamma^2-\alpha\beta\delta^2-\alpha^2\beta^2)$$
$$+\mu^4(-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha\beta+\gamma\delta)\}.$$

$$\Psi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu^3}\{\mu(\alpha\gamma^2\delta^2+\beta\gamma^2\delta^2-\gamma\alpha^2\beta^2-\delta\alpha^2\beta^2) + \mu^3(\alpha\gamma^2+\alpha\delta^2+2\alpha\gamma\delta+\beta\gamma^2$$
$$+\beta\delta^2+2\beta\gamma\delta-\alpha^2\gamma-\beta^2\gamma-2\alpha\beta\gamma-\alpha^2\delta-\beta^2\delta-2\alpha\beta\delta)$$
$$+\mu^5(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\}.$$

$\chi_{\alpha\beta}$ n'intervient pas dans la suite du calcul.
Les coordonnées des points d'intersection des axes de Steiner $y=\mu+(N/D)\,x$ et $y=\mu+(N'/D)\,x$ avec le cercle $A_{12}MA_{34}$ sont:

$$x_{(N/D)} = \frac{\Phi_{\alpha\beta}+(N/D)\,(\Psi_{\alpha\beta}-2\mu\Delta_{\alpha\beta})}{[1-(N/N')]\,\Delta_{\alpha\beta}}\,,\quad y_{(N/D)} = \mu+(N/D)\cdot x_{(N/D)}\,,$$

$$x_{(N'/D)} = \frac{\Phi_{\alpha\beta}+(N'/D)\,(\Psi_{\alpha\beta}-2\mu\Delta_{\alpha\beta})}{[1-(N'/N)]\,\Delta_{\alpha\beta}}\,,\quad y_{(N'/D)} = \mu+(N'/D)\cdot x_{(N'/D)}\,.$$

Le coefficient angulaire de la droite qui joint les points d'intersection des axes de Steiner et du cercle $A_{12}MA_{34}$ est égal à:

$$\frac{D\Phi_{\alpha\beta}+(1/2)\,(N+N')\,(\Psi_{\alpha\beta}-2\mu\Delta_{\alpha\beta})}{(\Psi_{\alpha\beta}-2\mu\Delta_{\alpha\beta})\cdot D-(1/2)\,(N+N')\,\Phi_{\alpha\beta}}\quad (D,\,N,\,N' \text{ notations antérieures})$$

et pour que cette droite soit perpendiculaire à $A_{12}A_{34}$, l'expression ci-dessus doit être égale à $-\mu\dfrac{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)}{\alpha\beta-\gamma\delta}$.

En développant le calcul, on obtient un polynome du 12^e degré $\mu\, P_{(11)} + \mu^3\, P_{(9)} + \mu^5\, P_{(7)} + \mu^7\, P_{(5)} + \mu^9\, P_{(3)}$ qui doit être $= 0$, les P désignent des polynomes en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ d'ordre indiqués par les indices, qui sont tous identiquement nuls.

c) En posant $H = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ et $H_1 = \alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma/\mu^2$ l'équation du cercle (α_4) s'écrit: $x^2 + y^2 - H_1 \cdot x - [\mu + (H/\mu)] \cdot y + H = 0$ et les coordonnées du point z_4 sont:

$$x = \frac{1}{\mu^2 + \delta^2} (\mu^2 H_1 + \delta H - \mu^2 \delta) \; ; \quad y = \frac{\mu}{\mu^2 + \delta^2} (H - \delta H_1 + \delta^2)$$

d'où on tire $H_1 = \delta + x - (\delta/\mu)\, y$ et $H = \delta\, x + \mu\, y$
en portant ces valeurs dans l'équation de (α_4), le terme de gauche s'annule identiquement.

Eine weitere Lösung sandte J. T. Groenman (Groningen, Niederlande).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Oktober 1976** an **Dr. H. Kappus**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46), Problem 672A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724A (Band 30, p. 91).

Aufgabe 761. In einer Ebene seien ein Dreieck ABC sowie ein Punkt P gegeben. $A'B'C'$ bezeichne das aus ABC durch Punktspiegelung an P entstehende Dreieck. Eine durch P verlaufende Gerade schneide $B'C'$ in A_1, $C'A'$ in B_1, $A'B'$ in C_1. Man zeige, dass sich die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkt schneiden.

G. Bercea, München, BRD

Aufgabe 762. Man zeige für alle $n \in N$: Es gibt kein n-tupel $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ nichtkonstanter Polynome mit reellen Koeffizienten derart, dass für jede natürliche Zahl x_0 mindestens eine der Zahlen $f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0)$ eine Primzahl ist.

E. Teuffel, Korntal, BRD

Aufgabe 763. Man zeige für alle $n \in N$: Es gibt kein n-tupel $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ von Polynomen mindestens 2. Grades mit reellen Koeffizienten derart, dass jede Primzahl p eine Darstellung $p = f_i(x_0)$ mit $1 \leq i \leq n$ und $x_0 \in N$ besitzt.

E. Teuffel, Korntal, BRD

Aufgabe 764. Man bestimme den Rang der $(p-1)$-reihigen zirkulanten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p-2 & p-1 \\ 2 & 3 & \dots & p-1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p-1 & 1 & & p-3 & p-2 \end{pmatrix}$$

im Primkörper der Charakteristik p, $p \geq 3$. K. Spindelböck, Graz, Österreich

Problem 764A. Man bestimme den Rang der $(p-1)$-reihigen zirkulanten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{p-2} & \frac{1}{p-1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{p-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{p-1} & 1 & \dots & \frac{1}{p-3} & \frac{1}{p-2} \end{pmatrix}$$

im Primkörper der Charakteristik p, $p \geq 3$. K. Spindelböck, Graz, Österreich

Literaturüberschau

The Abacus. Von P. MOON. 197 Seiten mit 81 Figuren. £2.05. Gordon and Breach Science Publishers, New York–London–Paris 1971.

Dieses Buch ist eine umfassende Studie über Zählrahmen und Rechenbretter. Der Autor – ein emeritierter Professor am MIT – hat offenbar die Auseinandersetzung mit dieser Sorte von Rechenprothesen als lebenslängliches Hobby betrieben. Die Studie beginnt mit einem historischen Abriss. Anschliessend werden die in den verschiedenen Kulturkreisen entwickelten Typen von Zählrahmen beschrieben und eingehend analysiert. Der zahlentheoretische Hintergrund ist in mehreren Zwischenkapiteln gut herausgestellt. Der Leser weiss nach der Lektüre dieses amüsanten Buches allerhand über Zählrahmen; er hat aber sicher auch noch einiges an elementarer Zahlentheorie mitbekommen, das sich im Unterstufen-Unterricht gut verwerten lässt (Rechnen in verschiedenen Positions-Systemen, Rechenkniffe). M. JEGER

World Dictionary of Historians of Mathematics. Edited by KENNETH O. MAY and CONSTANCE MOORE GARDNER, for the Commission on History of Mathematics of the Division of the History of Science of the International Union for the History and Philosophy of Science (UNESCO). First Edition 1972, 44 Seiten. Historia Mathematica, University of Toronto, Canada. Can. $4.00.

Verzeichnis von etwa 700 Mathematikhistorikern der ganzen Welt mit Angabe der Adresse und des Sachgebietes. In der Liste figuriert auch der Schweizer R. Fueter, der immerhin schon mehr als 20 Jahre tot ist. Diese Feststellung lässt gewisse Zweifel an der Zuverlässigkeit dieser Unesco-Publikation aufkommen. Ein geographischer Index beschliesst das Heft.

J. J. BURCKHARDT