

Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten. II Teil

Autor(en): **Schröder, Eberhard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32147>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Minustyp sind. Aus der im vorhergehenden Abschnitt 5 gewonnenen Übersicht über die arithmetische Natur der Lösungspaare vom Plustyp ist hiermit auch eine solche für die begleitenden Lösungspaare vom Minustyp gewonnen. *Auch in ihnen treten nur alle ungeraden natürlichen Zahlen ausser 1 und alle natürlichen Vielfachen von 8 auf.*

Die damit gewonnene Übersicht über die Lösungen der zugrundegelegten diophantischen Gleichung (1) kann auch auf mannigfache Weise durch elementararithmetische Betrachtungen innerhalb des rationalen Zahlkörpers gewonnen werden. Doch scheint mir, wie schon gesagt, die hier durchgeführte Heranziehung der eindeutigen Primzerlegung im Körper der sechsten Einheitswurzeln interessanter und eleganter.

Helmut Hasse, Hamburg

Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten

II. Teil

Als zweiter Zugang zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten soll hier eine in der ebenen Kinematik auftretende birationale quadratische Transformation verwendet werden¹⁾.

Der erste Momentanpol P_1 eines ebenen Zwangslaufes liege im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Die Polbahntangente falle mit der x -Achse zusammen, und der zweite, auf der y -Achse liegende Momentanpol P_2 – auch Wendepol genannt – habe die Koordinaten $P_2(0, -2\rho)$. Dann lautet die Gleichung des Wendekreises w im Bezugsmoment der Bewegung

$$x^2 + y^2 + 2\rho y = 0. \quad (1)$$

Alle von P_1 verschiedenen Punkte der Gangebene Γ , die sich mit dem Wendekreis decken, und nur diese, durchlaufen im Augenblick der Bewegung Wendepunkte ihrer Bahnkurve. Ein beliebiger Punkt $X(x, y)$ ist mit dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{X}(\xi, \eta)$ durch eine birationale quadratische Verwandtschaft T verknüpft. Die Transformationsformeln für T lauten bezüglich des vorgegebenen Koordinatensystems

$$\xi = \frac{2\rho xy}{x^2 + y^2 + 2\rho y}, \quad \eta = \frac{2\rho y^2}{x^2 + y^2 + 2\rho y}. \quad (2)$$

¹⁾ Im ersten Teil dieses Beitrages wurde eine von K.H. Schellbach eingeführte Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte zur Untersuchung eines hyperoskulierenden Kegelschnittbüschels ausgewertet [5].

Entsprechend gilt für die Umkehrtransformation T^{-1}

$$x = -\frac{2\rho\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2 - 2\rho\eta}, \quad y = -\frac{2\rho\eta^2}{\xi^2 + \eta^2 - 2\rho\eta}. \quad (3)$$

Unterwirft man eine nicht durch P_1 gehende Gerade g der Transformation T , ergibt sich ein nicht zerfallender Kegelschnitt κ . Dieser oskuliert den an der Polbahntangente gespiegelten Wendekreis – aus kinematischer Sicht als Rückkehrkreis r bezeichnet – in P_1 . Die Bilder aller nicht durch P_1 gehenden Geraden ergeben somit ein Netz von Kegelschnitten. Diese haben den Rückkehrkreis r in P_1 als gemeinsamen Krümmungskreis. Die drei Hauptpunkte dieses Feldes sind daher in P_1 zusammengerückt und spannen dort ein Linienelement zweiter Ordnung von r auf. Die Polbahntangente ist die dreifach zu zählende Hauptgerade in beiden Feldern. Das Bild einer durch P_1 gehenden Geraden zerfällt in zwei Geraden, nämlich die Gerade selbst und die Polbahntangente. Die Gesamtheit der Bildkegelschnitte stellt ein homaloides Netz dar. Eine nicht durch P_1 gehende Gerade g bildet sich auf eine

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hyperbel} \\ \text{Parabel} \\ \text{Ellipse} \end{array} \right\}$ ab, je nachdem die Schnittpunktkoordinaten von g mit w

$\left\{ \begin{array}{l} \text{getrennt reell} \\ \text{zusammenfallend} \\ \text{konjugiert komplex} \end{array} \right\}$ sind.

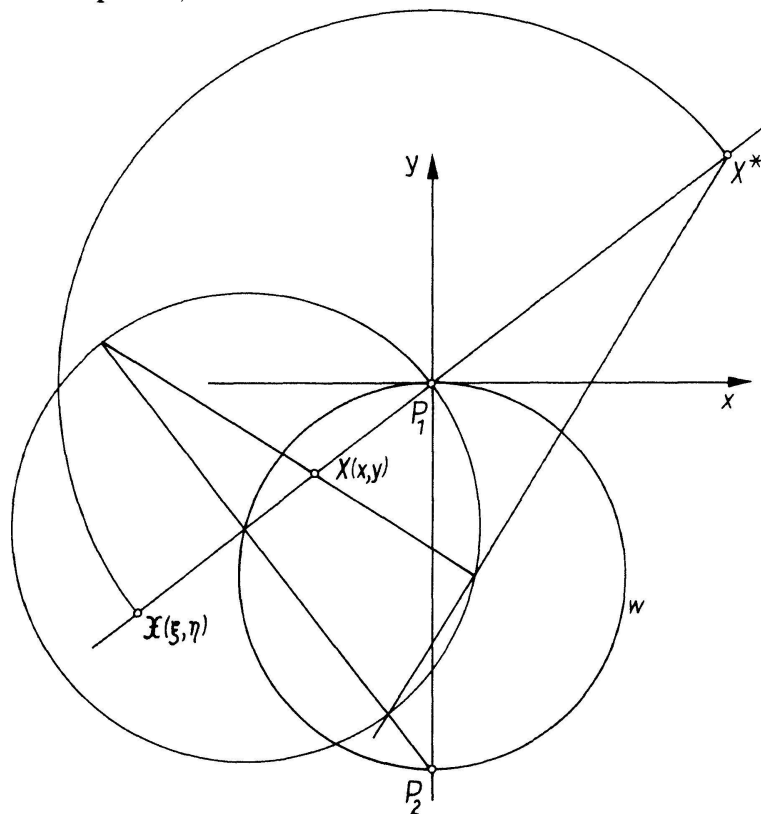


Abb. 1

Abbildung 1 zeigt, wie die Transformation T konstruktiv zu realisieren ist. Auf einem Polstrahl bilden die Punktmengen $\{X\}$ und $\{\mathfrak{X}\}$ zwei gleichlaufende projektive Punktreihen, deren Fixpunkte in P_1 zusammenfallen. Ihre Gegenpunkte liegen in den von P_1 verschiedenen Schnittpunkten des Polstrahles mit w bzw. r . Den Punkten der Polbahntangente entspricht der erste Momentanpol [1], [2], [3].

Nach diesen Vorbetrachtungen sollen die Geraden eines Büschels $\{g\}$ der Transformation T unterworfen werden, wobei der Träger C des Büschels ein von P_1 verschiedener Punkt der Polbahntangente (x -Achse) ist. Mit $C(-c, 0)$, $c > 0$, und dem Achsenabschnitt v auf der y -Achse als Büschelparameter ergibt sich für $\{g\}$

$$vx - cy + vc = 0 \quad \text{mit} \quad (-\infty < v < \infty). \quad (4)$$

Die Anwendung von (3) auf (4) führt für $v \neq 0$ auf die Gleichung eines nicht-zerfallenden Kegelschnittes. Diese werde wieder auf das xy -System bezogen.

$$vcx^2 - 2\rho vxy + (2\rho + v)cy^2 - 2\rho vcy = 0. \quad (5)$$

In dem nicht auszuschliessenden Fall $1/v = 0$ gilt die Gleichung

$$cx^2 - 2\rho xy + cy^2 - 2\rho cy = 0. \quad (5')$$

Für den Durchmesser d eines Kegelschnittes aus $\{\kappa\}$ resultiert nach (5)

$$y = \frac{c}{\rho}x. \quad (6)$$

Da in (6) v nicht enthalten ist, haben die Bildkegelschnitte von $\{g\}$ bezüglich P_1 neben r als gemeinsamen Krümmungskreis zusätzlich d als gemeinsamen Durchmesser. Das Geradenbüschel $\{g\}$ wird durch die Transformation T in ein hyperoskulierendes Büschel von Kegelschnitten übergeführt. Dabei ist d die Polare von C bezüglich des Wendekreises w .

Wie in [5] gezeigt wurde, umhüllen die Achsen der Kegelschnitte eines hyperoskulierenden Büschels eine Parabel π_h . Ihre Gleichung lautet nach [5], Formel 2, im vorliegenden Fall unter Beachtung von $m = c/\rho$

$$(\rho x + cy)^2 + \rho c(2\rho x - 2cy + \rho c) = 0. \quad (7)$$

Aus Gleichung (7) lassen sich einige geometrische Lagebeziehungen von π_h ablesen, die in die Sprechweise der ebenen Kinematik übertragen werden sollen.

Das dem Geradenbüschel $\{g\}$ mittels T zugeordnete Kegelschnittbüschel $\{\kappa\}$ besitzt eine Achsenhüllparabel π_h , die die Polbahntangente im Träger C von $\{g\}$ und die Polbahnnormale im Mittelpunkt K des Rückkehrkreises r berührt. C , K und der Brennpunkt F_h liegen auf der Polaren von P_1 bezüglich π_h . Die Polare d von C bezüglich des Wendekreises w ist die Leitgerade von π_h . Die Parallele g_a zu g durch P_1 schneidet den Rückkehrkreis ausser in P_1 im Bild des Fernpunktes von g , also in dem einfach zu zählenden Schnittpunkt $G = (r\kappa)$.

Dieser kinematische Zugang eröffnet auch eine Konstruktionsmöglichkeit für die Asymptoten der Hyperbeln aus $\{\kappa\}$. Eine den Wendekreis w in den nicht zusammenfallenden Punkten W_1 und W_2 schneidende Gerade aus $\{g\}$ geht mittels der Transformation T in eine Hyperbel über. Die Asymptoten dieser Hyperbel sind die Parallelen zu (P_1W_1) bzw. (P_1W_2) durch M . Dabei ist M Halbierungspunkt der Strecke $\overline{P_1\bar{x}}$. Für die Achsen von κ bietet sich ein zweifacher Zugang, nämlich als Tangenten aus M an die Hüllparabel π_h oder als Winkelhalbierende der Asymptoten an (vgl. Abb. 2).

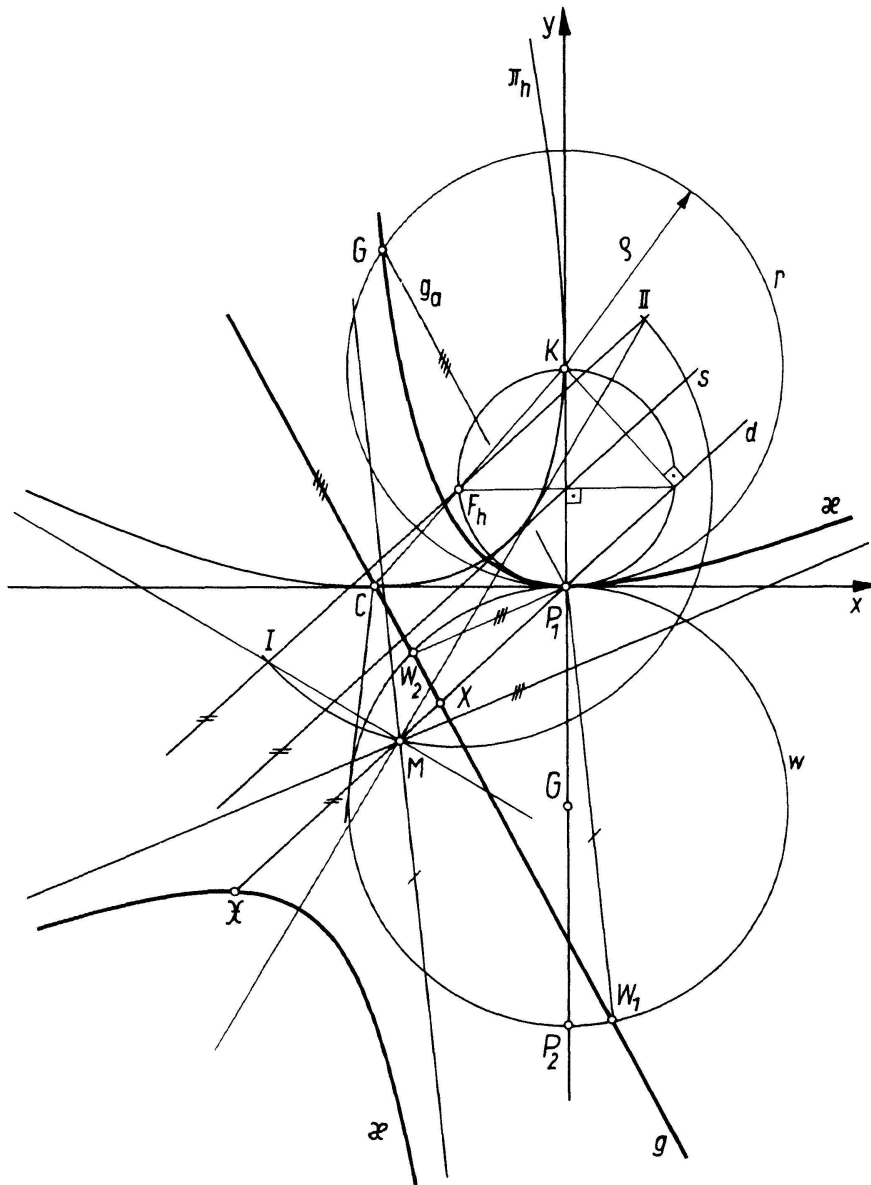


Abb. 2

In diesem Zusammenhang ist noch ein dritter Zugang zu dem hyperoskulierenden Kegelschnittbüschel $\{\kappa\}$ von Interesse. Der aus einer Geraden g durch die Transformation T erzeugte Bildkegelschnitt κ ist auch als zentrisch-kollineares Bild des Rückkehrkreises r (Krümmungskreis von κ in P_1) erklärbar. Dabei ist P_1 das Kollineationszentrum, die Parallele g_a zu g durch P_1 die Kollineationsachse und g die Fluchtgerade. Durch Spiegelung von g an g_a erhält man die Verschwindungs-

gerade g_v dieser Kollineation. Damit sind alle Bestimmungsstücke bereitgestellt, um die Transformation $r \rightarrow \kappa$ konstruktiv ausführen zu können [1], [4]. Zu dem Schnittpunkt H_v von d mit der Verschwindungsgeraden g_v sucht man die Polare h bezüglich r auf. Diese schneidet den Durchmesser d im Urbild M^* des Mittelpunktes M von κ . M liegt einerseits auf dem Kollineationsstrahl durch M^* , andererseits auf der Parallelen zur x -Achse durch den Punkt $A = (g_a h)$, da A bei der Kollineation in sich übergeht und C_v in den Fernpunkt der x -Achse transformiert wird. Der Brennpunkt F_h der Achsenhüllparabel π_h ergibt sich nach der in [5], Abb.2 und 3, abgeleiteten Konstruktion. Ferner schneidet der Kreis um F_h mit der Strecke $\overline{MF_h}$ als Radius die Parallele zu d durch F_h in den Punkten I und II . Die Verbindungsgeraden (MI) und (MII) legen Haupt- und Nebenachse des Bildkegelschnittes κ fest. Die Längen der Achsen sind mittels der angedeuteten Nebenkonstruktion leicht auffindbar. Durchläuft g alle Geraden des Büschels $\{g\}$, so ergibt sich eine einparametrische Schar von zentrischen Kollineationen. Wendet man die Schar dieser Kollineationen auf den Rückkehrkreis r an, ergibt sich das gleiche Büschel $\{\kappa\}$ sich paarweise hyperoskulierender Kegelschnitte. Der Kreis r gehört diesem Büschel nicht an (vgl. Abb. 3).

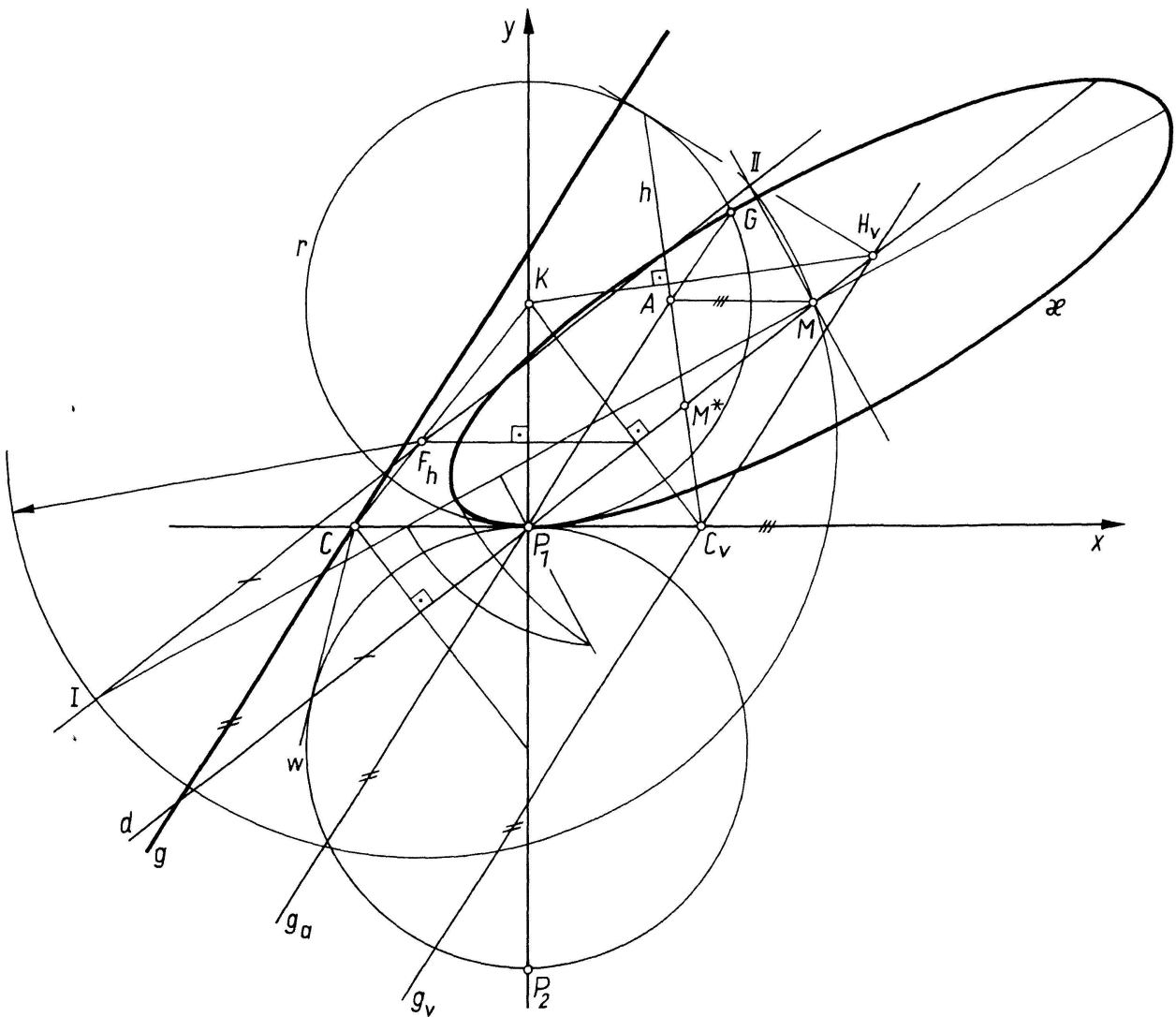


Abb.3

Ist C der Fernpunkt der x -Achse, so ist P_1 der allen Kegelschnitten von $\{\kappa\}$ gemeinsame Scheitelpunkt. Die Achsenhüllparabel zerfällt in die doppelt zu zählende Gerade mit der Gleichung $y = \rho$. In diesem Sonderfall gehört der Rückkehrkreis r dem hyperoskulierenden Kegelschnittbüschel an.

Eberhard Schröder, Technische Universität Dresden, DDR

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. BEREIS, *Über die Bahnkrümmungsmitten bei der Bewegung eines starren ebenen Systems*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden 11, Heft 4, 671–675 (1962).
- [2] W. BLASCHKE und H.R. MÜLLER, *Ebene Kinematik* (Verlag von R. Oldenbourg, München 1956), S.30–31.
- [3] L. BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik* (A. Felix, Leipzig 1888), S.117ff.
- [4] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Springer-Verlag, Wien 1957), S.118.
- [5] E. SCHRÖDER, *Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten*, *El. Math.* 30, 49–56 (1975).

Kleine Mitteilungen

Eine Bemerkung zu einer Integralformel von Cauchy

1. Nach einer im dreidimensionalen euklidischen Raum von CAUCHY [1] 1841 gefundenen Beziehung lässt sich die Oberfläche eines konvexen Körpers als Integral über zweidimensionale Inhalte darstellen, die sich durch Normalprojektion des Eikörpers ergeben. Es gilt die Integralformel

$$F(A) = \frac{1}{\pi} \int f(A, u) du, \quad (1)$$

in der A einen konvexen Körper mit inneren Punkten, $f(A, u)$ den Flächeninhalt des Normalrisses von A in Richtung u auf die Ebene $E(u)$ bezeichnet; du bedeutet die Richtungsdichte, d. h. das Flächenelement der Einheitskugel, über die sich die Integration in (1) wie stets im folgenden erstreckt. Unter Verwendung von (1) kann $F(A)$ nach oben abgeschätzt werden, indem man den Normalriss $f(A, u)$ allgemeiner durch Parallelprojektion von A in Richtung u auf die Randfläche \dot{K} einer Kugel K ersetzt, für die $A \subset K$ gilt. Es ergibt sich, dass in der aufzustellenden Ungleichung das Gleichheitszeichen genau dann eintritt, wenn A eine zu K konzentrische Kugel ist.

2. Zunächst zu diesem Spezialfall: Seien A und K konzentrische Kugeln mit den Radien r bzw. $R \geq r$, $F(A)$ bzw. $F(K) = 4\pi R^2$ ihre Oberflächen, sowie f_K die Mantelfläche der Kugelhaube von K mit Grundkreisradius r . Dann gilt $f_K = 2\pi R h = 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2})$ (Abb. 1). Mit $f'_K := 2\pi R (R + \sqrt{R^2 - r^2}) = 4\pi R^2 - f_K$ ergibt sich aus (1):