

# Über graziöse Numerierungen von Graphen

Autor(en): **Bodendiek, H. / Schumacher, H. / Wegner, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32151>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 32

Heft 3

Seiten 49–80

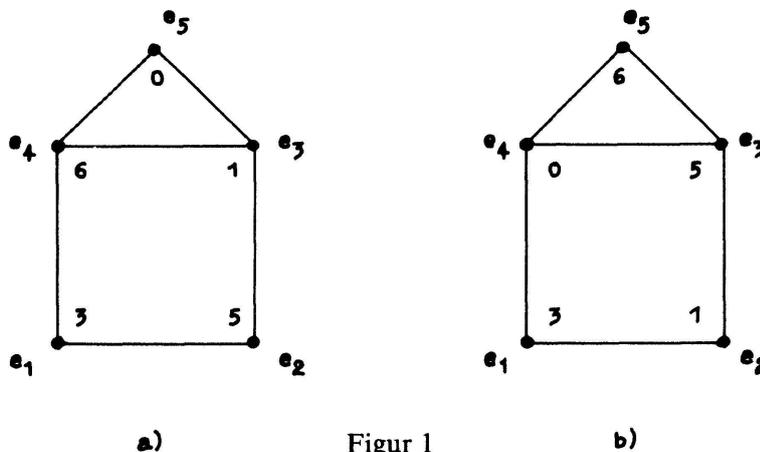
10. Mai 1977

## Über graziöse Numerierungen von Graphen

In der Theorie der Numerierung von Graphen<sup>1)</sup> geht man nach [1] und [2] von endlichen, schlichten, zusammenhängenden, ungerichteten Graphen<sup>2)</sup>  $G=(E, K)$  aus und ordnet mittels beliebiger Vorschriften  $f$  bzw.  $g$  den  $n=|E|$  Ecken von  $G$  nicht negative ganze Zahlen bzw. den  $k=|K|$  Kanten von  $G$  positive ganze Zahlen zu. Geht man speziell von einer injektiven Abbildung  $f: E \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$  aus und definiert dann mittels  $f$  die Abbildung

$$g: \begin{cases} K \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \\ \{e, e'\} \rightarrow |f(e) - f(e')|, \end{cases}$$

so ergibt sich die interessante Frage, ob es Graphen gibt, deren Ecken mittels einer injektiven Abbildung  $f$  so numeriert werden können, dass die Abbildung  $g$  bijektiv ist. Wie schon in [2] gezeigt, ist diese Frage zu bejahen. Graphen, deren Ecken und Kanten sich mittels der speziell definierten Abbildungen numerieren lassen, heissen nach [1] und [2] graziös. Die durch  $f$  hervorgerufene Numerierung der Ecken graziöser Graphen nennen wir im folgenden kurz graziöse Numerierung. Die Figur 1a zeigt den graziösen Graphen  $G=(E, K)$  mit  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ,



Figur 1

1) Wir verstehen hier unter einem Graphen  $G$  das geordnete Paar  $G=(E, K)$ , wobei  $E$  eine beliebige Menge und  $K \subset \mathfrak{P}_2(E) = \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E, e \neq e'\}$  bedeuten.

2) Zur Definition der graphentheoretischen Grundbegriffe vergleiche man etwa [3], [4] und [5].

$$K = \{\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_3, e_4\}, \{e_3, e_5\}, \{e_4, e_5\}\},$$

$$f: \begin{cases} E \rightarrow \{0, 1, \dots, 6\} \\ e_1 \rightarrow 3 \\ e_2 \rightarrow 5 \\ e_3 \rightarrow 1 \\ e_4 \rightarrow 6 \\ e_5 \rightarrow 0 \end{cases} \quad g: \begin{cases} K \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\} \\ \{e_1, e_2\} \rightarrow 2 \\ \{e_2, e_3\} \rightarrow 4 \\ \{e_3, e_4\} \rightarrow 5 \\ \{e_1, e_4\} \rightarrow 3 \\ \{e_3, e_5\} \rightarrow 1 \\ \{e_4, e_5\} \rightarrow 6 \end{cases}$$

Ist ein Graph graziös, so gibt es stets mindestens zwei zugehörige verschiedene graziöse Numerierungen. Zum Nachweis dieser Aussage gehen wir von einem graziösen Graphen  $G = (E, K)$  mit einer zugehörigen Injektion

$$f: \begin{cases} E \rightarrow \{0, 1, \dots, k\} \\ e \rightarrow f(e) \text{ für alle } e \in E \end{cases}$$

und der induzierten Bijektion

$$g: \begin{cases} K \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \\ \{e, e'\} \rightarrow |f(e) - f(e')| \text{ für alle } \{e, e'\} \in K \end{cases}$$

aus und definieren zwei neue Abbildungen  $f'$  und  $g'$  mit

$$f': \begin{cases} E \rightarrow \{0, 1, \dots, k\} \\ e \rightarrow k - f(e) \text{ für alle } e \in E \end{cases}$$

und

$$g': \begin{cases} K \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \\ \{e, e'\} \rightarrow |f'(e) - f'(e')| \text{ für alle } \{e, e'\} \in K. \end{cases}$$

Man erkennt dann unmittelbar, dass  $f'$  injektiv ist und  $g' = g$  ist. Die durch  $f'$  hervorgerufene graziöse Numerierung von  $G$  nennen wir komplementär zu der von  $f$  bestimmten Numerierung. In Figur 1b ist die zur Figur 1a komplementäre Numerierung angegeben.

Bezeichnet nun  $\Gamma$  die Menge aller endlichen, schlichten, zusammenhängenden, ungerichteten Graphen, so besteht nun in der Theorie der graziösen Graphen die Hauptaufgabe in der Bestimmung möglichst grosser Teilklassen graziöser Graphen von  $\Gamma$ .

In der vorliegenden Note wollen wir uns nun unter Verwendung der in [1] und [2] gewonnenen Ergebnisse der Bestimmung von vier Klassen graziöser Graphen aus  $\Gamma$  zuwenden. Dazu benutzen wir entscheidend die in [1] bewiesene Tatsache,

dass ein Kreis  $C_k=(E, K)$  der Länge  $k$  mit  $E=\{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\}$ ,  $K=\{\{e_i, e_{i+1}\} \mid i=1, 2, \dots, k-2\} \cup \{e_0, e_{k-1}\}$  und  $k \geq 3$  genau dann graziös ist, wenn  $k \equiv 0 \pmod{4}$  oder  $k \equiv 3 \pmod{4}$  gilt. Zur Bestimmung der oben schon erwähnten vier Klassen graziöser Graphen aus  $\Gamma$  beschränken wir uns nun auf Kreise  $C_k=(E, K)$  mit  $k \equiv 0 \pmod{4}$ . Nach [1] ergibt die folgende injektive Abbildung  $f$  mit

$$f: \begin{cases} E \rightarrow \{0, 1, \dots, k\} \\ e_\mu \rightarrow \sum_{i=0}^{\mu-1} (-1)^i a_{k-1-i} \text{ für } \mu=0, 1, \dots, k-1 \end{cases}$$

eine graziöse Numerierung von  $C_k$ . Hierbei sind die  $a_i$  positive ganze Zahlen mit

$$a_i = i \text{ für } i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1$$

$$a_i = i + 1 \text{ für } i = \frac{k}{2}, \frac{k}{2} + 1, \dots, k - 1.$$

Daraus ergibt sich

$$(i) f(e_\mu) = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, \text{ falls } \mu \text{ gerade} \\ k - \frac{\mu-1}{2} - \left\lfloor \frac{2\mu}{k+2} \right\rfloor, \text{ falls } \mu \text{ ungerade.} \end{cases}$$

sowie die zu  $f$  komplementäre Numerierung

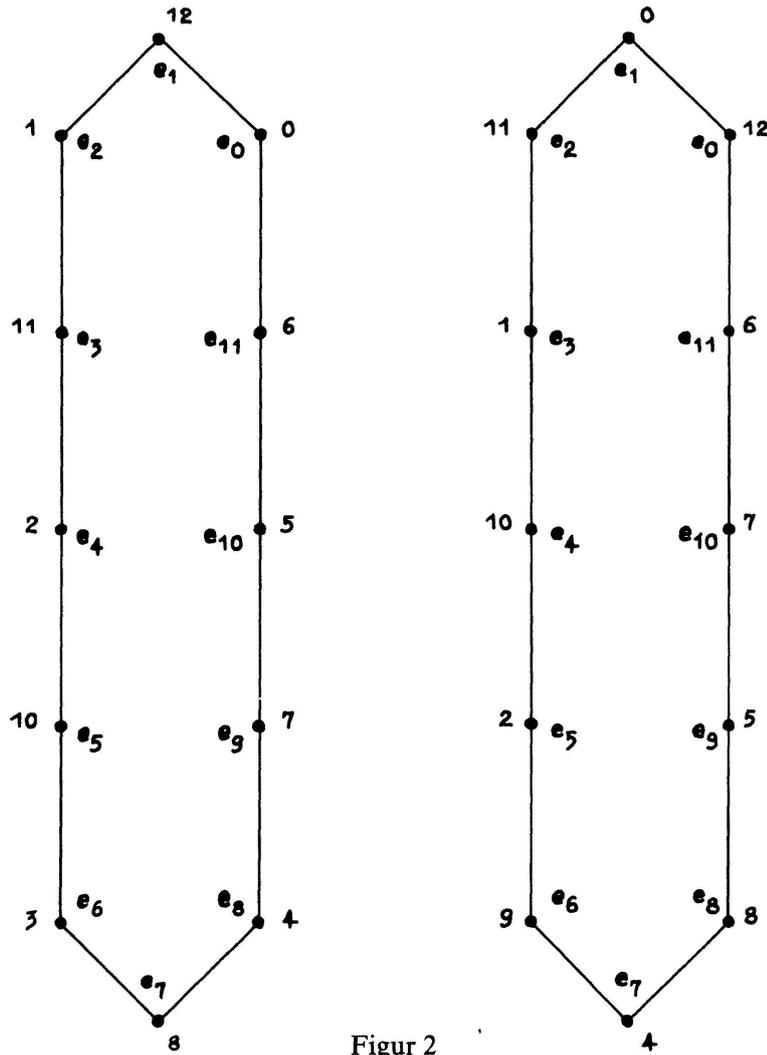
$$(ii) f'(e_\mu) = \begin{cases} k - \frac{\mu}{2}, \text{ falls } \mu \text{ gerade} \\ \frac{\mu-1}{2} + \left\lfloor \frac{2\mu}{k+2} \right\rfloor, \text{ falls } \mu \text{ ungerade.} \end{cases}$$

In der Figur 2 sind die beiden durch  $f$  und  $f'$  hervorgerufenen graziösen Numerierungen von  $C_{12}$  dargestellt.

Zur Vereinfachung der folgenden Untersuchung sei noch darauf hingewiesen, dass mit jedem graziösen Graphen  $G$  auch jeder zu  $G$  isomorphe Graph  $G' = \varphi(G)$  graziös ist. Man braucht nämlich nur die graziöse Numerierung von  $G$  in der Weise auf  $G' = \varphi(G)$  zu übertragen, dass man für jede Ecke  $a$  von  $G$  die  $a$  zugeordnete Zahl auch dem Bild  $\varphi(a)$  in  $G'$  zuordnet.

Nach diesen Vorbereitungen können die vier Teilklassen graziöser Graphen aus  $\Gamma$  ohne besondere Schwierigkeiten bestimmt werden. Es gilt zunächst der

**Satz 1.** *Es sei  $C_k=(E, K)$  ein Kreis der Länge  $k$  mit  $k \equiv 0 \pmod{4}$ . Dabei sei  $E=\{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\}$  und  $K=\{\{e_i, e_{i+1}\} \mid i=0, 1, \dots, k-2\} \cup \{\{e_0, e_{k-1}\}\}$ . Dann ist der durch Hinzufügen der Kante  $\{e_1, e_{k-1}\}$  zu  $C_k$  gewonnene Graph  $G_1=(E_1, K_1)$  mit  $E_1=E$ ,  $K_1=K \cup \{\{e_1, e_{k-1}\}\}$  graziös.*



Figur 2

**Beweis.** Zum Beweis dieser Behauptung gehen wir von der komplementären Numerierung mit der zugehörigen injektiven Abbildung  $f'$  von (ii) für  $C_k$  aus und definieren eine Abbildung  $f_1: E_1 \rightarrow \{0, 1, \dots, k+1\}$  folgendermassen:

$$f_1: \begin{cases} E_1 \rightarrow \{0, 1, \dots, k+1\} \\ e_i \rightarrow f'(e_i) \text{ für } i=0, 1, \dots, k-2 \\ e_{k-1} \rightarrow k+1 \end{cases}$$

$f_1$  ist offenbar eine Injektion. Für die von  $f_1$  induzierte Abbildung

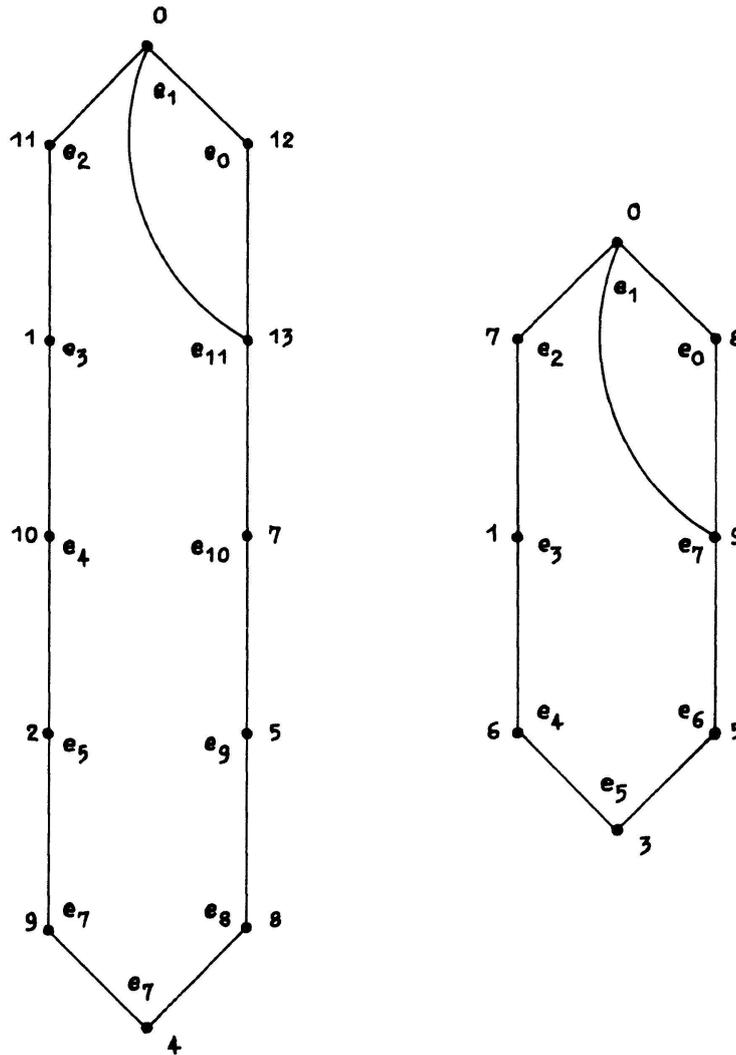
$$g_1: \begin{cases} K_1 \rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\} \\ \{e_i, e_j\} \rightarrow |f_1(e_i) - f_1(e_j)| \text{ für alle } \{e_i, e_j\} \in K_1 \end{cases}$$

gilt:  $g_1$  und  $g'$  stimmen auf der Menge  $K_1 \setminus \{\{e_0, e_{k-1}\}, \{e_{k-2}, e_{k-1}\}, \{e_1, e_{k-1}\}\}$  überein. Mit Hilfe von (ii) hat man sofort

$$g_1(\{e_0, e_{k-1}\}) = 1 = g'(\{e_{k-2}, e_{k-1}\})$$

$$g_1(\{e_{k-2}, e_{k-1}\}) = \frac{k}{2} = g'(\{e_0, e_{k-1}\})$$

$$g_1(\{e_1, e_{k-1}\}) = k+1.$$



Figur 3

Hieraus und aus der Surjektivität von  $g'$  folgt die Surjektivität von  $g_1$ . Da weiterhin Bild und Urbild von  $g_1$  endlich sind, ist  $g_1$  bijektiv. Also ist  $G_1$  graziös.

In der Figur 3 sind zwei graziöse Graphen aus der durch Satz 1 bestimmten Teilklasse von  $\Gamma$  angegeben.

**Bemerkung.** Adjungiert man zu  $C_k$  statt der Kante  $\{e_1, e_{k-1}\}$  eine Kante  $\{e_i, e_j\}$  mit  $i-j \equiv \pm 2(k)$ , so ist der jeweils entstehende Graph zu  $G_1$  isomorph und somit auf Grund der obigen Vorbemerkung ebenfalls graziös.

Eine ähnliche Klasse graziöser Graphen wird in Satz 2 bestimmt.

**Satz 2.** Es sei  $C_k=(E,K)$  ein Kreis der Länge  $k$  mit  $k \equiv 0(4)$ . Dabei sei  $E=\{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\}$  und  $K=\{\{e_i, e_{i+1}\} \mid i=0, 1, \dots, k-2\} \cup \{\{e_0, e_{k-1}\}\}$ . Dann ist der durch Adjunktion der Kante  $\{e_0, e_3\}$  zu  $C_k$  gewonnene Graph  $G_2=(E_2, K_2)$  mit  $E_2=E$ ,  $K_2=K \cup \{\{e_0, e_3\}\}$  graziös.

**Beweis.** Für  $k=4$  gilt  $G_2 = C_k$ . Für  $k \geq 8$  gehen wir von der graziösen Numerierung mit der zugehörigen injektiven Abbildung  $f$  in (i) für  $C_k$  aus und definieren wegen  $f(e_1) = k$  in naheliegender Weise

$$f_2: \begin{cases} E_2 \rightarrow \{0, 1, \dots, k+1\} \\ e_i \rightarrow f(e_i) \text{ für } i=0, 2, 3, \dots, k-1 \\ e_1 \rightarrow k+1. \end{cases}$$

$f_2$  ist offenbar eine injektive Abbildung. Für die von  $f_2$  induzierte Abbildung  $g_2$  mit

$$g_2: \begin{cases} K_2 \rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\} \\ \{e_i, e_j\} \rightarrow |f_2(e_i) - f_2(e_j)| \text{ für jedes } \{e_i, e_j\} \in K_2 \end{cases}$$

gilt:  $g_2$  stimmt auf der Menge  $K_2 \setminus \{\{e_0, e_1\}, \{e_1, e_2\}\}$  mit  $g$  überein. Mit (i) hat man sofort

$$\begin{aligned} g_2(\{e_0, e_1\}) &= k+1 \\ g_2(\{e_1, e_2\}) &= k = g(\{e_0, e_1\}) \\ g_2(\{e_0, e_3\}) &= k-1 = g(\{e_1, e_2\}). \end{aligned}$$

Da  $g$  bijektiv ist, folgt damit auch, dass  $g_2$  bijektiv ist. Also ist  $G_2$  graziös.

In der Figur 4 sind zwei Vertreter aus der durch den Satz 2 bestimmten Klasse graziöser Graphen dargestellt.

**Bemerkung.** Adjungiert man zu  $C_k$  anstelle der Kante  $\{e_0, e_3\}$  eine Kante  $\{e_i, e_j\}$  mit  $i-j \equiv \pm 3(k)$ , so ist jeder der so gewonnenen Graphen zu  $G_2$  isomorph und damit ebenfalls graziös.

Betrachtet man die injektive Abbildung  $f$  in (i) genauer, so erkennt man direkt, dass für jeden Kreis  $C_k$  mit  $k \equiv 0(4)$  stets  $f(E) = \{0, 1, \dots, k\} \setminus \{(3k/4)\}$  gilt. Die  $(3k/4)$  aufeinander folgenden nicht negativen ganzen Zahlen  $0, 1, \dots, (3k/4) - 1$  kommen also unter  $f$  als Bilder vor, und zwar in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} f(e_{2i}) &= i \text{ für } i=0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1 \\ f(e_{k-(2i+1)}) &= \frac{k}{2} + i \text{ für } i=0, 1, \dots, \frac{k}{4} - 1 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache ergibt sich dann der

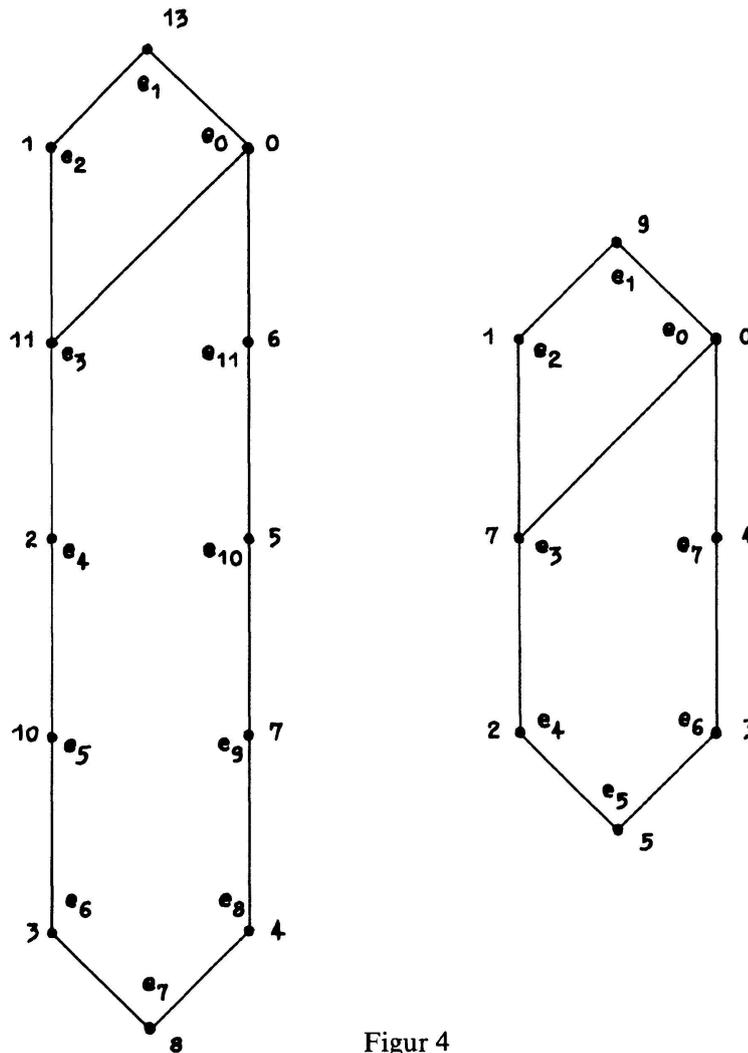
**Satz 3.** *Es sei  $C_k = (E, K)$  der in Satz 2 beschriebene Kreis. Ferner sei  $a \notin E$  und  $E' = E \cup \{a\}$ . Bildet man dann sukzessive die  $(3k/4)$  Graphen  $G_0, G_1, \dots, G_{(3k/4)-1}$  mittels der folgenden Vorschrift*

$$G_0 = (E, K_0) \text{ mit } K_0 = K \cup \{\{a, e_0\}\},$$

$$G_i = (E', K_i) \text{ mit } K_i = K_{i-1} \cup \{\{a, e_{2i}\}\} \text{ für } i=1, 2, \dots, (k/2) - 1,$$

$$G_{(k/2)+j} = (E', K_{(k/2)+j}) \text{ mit } K_{(k/2)+j} = K_{(k/2)+j-1} \cup \{\{a, e_{k-(2j+1)}\}\} \\ \text{für } j=0, 1, \dots, (k/4) - 1,$$

so ist  $G_i$  für  $i=0, 1, \dots, (3k/4) - 1$  graziös.



Figur 4

**Beweis.** Sei  $i \in \{0, 1, \dots, (3k/4) - 1\}$  beliebig und  $G_i$  der oben definierte Graph mit  $G_i = (E_i, K_i)$ ,  $|E_i| = k + 1$  und  $|K_i| = k + i + 1$ . Die Abbildung

$$f_i: \begin{cases} E_i \rightarrow \{0, 1, \dots, k + i + 1\} \\ a \rightarrow k + i + 1 \\ e_\mu \rightarrow f(e_\mu) \text{ f\"ur } e_\mu \in E \end{cases}$$

ist offenbar injektiv. Da  $f$  eine graziöse Numerierung des Graphen  $C_k$  liefert, folgt aus den Vorbetrachtungen zu diesem Satz sofort, dass für die von  $f_i$  induzierte Abbildung  $g_i: K_i \rightarrow \{1, 2, \dots, k + i + 1\}$  gilt:

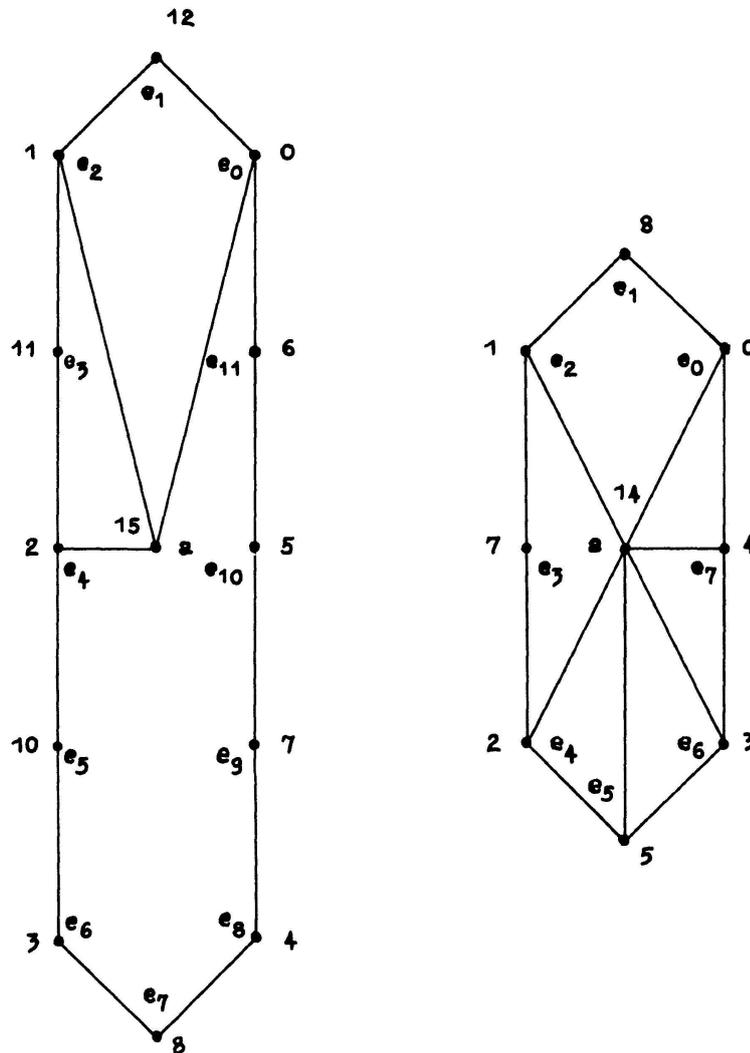
$$\begin{aligned} g_i(K) &= \{1, 2, \dots, k\} \\ g_i(K_i \setminus K) &= \{k + 1, k + 2, \dots, k + i + 1\}. \end{aligned}$$

Also ist  $g_i$  für  $i = 0, 1, \dots, (3k/4) - 1$  graziös.

Die Figur 5 zeigt zwei Graphen aus der durch Satz 3 bestimmten Klasse.

Es seien  $C_k^b = (E^b, K^b)$  und  $C_k^c = (E^c, K^c)$  zwei Kreise der Länge  $k$  mit  $E^b = \{b_0, b_1, \dots, b_{k-1}\}$ ,  $E^c = \{c_0, c_1, \dots, c_{k-1}\}$  und  $K^b = \{\{b_i, b_{i+1}\} \mid i = 0, 1, \dots, k - 2\} \cup$

$\{b_0, b_{k-1}\}$ ,  $K^c = \{c_i, c_{i+1} \mid i=0, 1, \dots, k-2\} \cup \{c_0, c_{k-1}\}$ . Dabei sei  $E^b \cap E^c = \emptyset$ .



Figur 5

Die beiden Kreise sind trivialerweise isomorph. Ist  $\varphi : E^b \rightarrow E^c$  ein solcher Isomorphismus, so nennen wir jeden Graphen  $P_k = (E, K)$  mit  $E = E^b \cup E^c$  und  $K = K^b \cup K^c \cup \{b_i, \varphi(b_i) \mid i=0, 1, \dots, k-1\}$  ein Prisma mit  $2k$  Ecken<sup>3)</sup>. Da alle Prismen mit  $2k$  Ecken offenbar isomorph sind, kann man sich etwa auf den Fall

$$(*) K = K^b \cup K^c \cup \{b_i, c_{i-1} \mid i=1, 2, \dots, k-1\} \cup \{b_0, c_{k-1}\}$$

beschränken. Im weiteren sei wieder  $k \equiv 0 \pmod{4}$ . Dann gilt

**Satz 4.** *Es sei  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \equiv 0 \pmod{4}$ . Dann ist das Prisma  $P_k$  mit  $2k$  Ecken graziös.*

<sup>3)</sup> Siehe Figur 6.

**Beweis.** Es sei  $P_k = (E, K)$ , wobei  $K$  die Darstellung (\*) besitze. Setzt man

$$f^b(b_\mu) = f^c(c_\mu) = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, & \text{falls } \mu \text{ gerade} \\ k - \frac{\mu-1}{2} - \left\lfloor \frac{2\mu}{k+2} \right\rfloor, & \text{falls } \mu \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so definiert dies nach (i) zwei Abbildungen  $f^b: E^b \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ ,  $f^c: E^c \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ , welche graziöse Numerierungen der zugehörigen Kreise  $C_k^b, C_k^c$  liefern. Wir definieren nun:

$$f: \begin{cases} E \rightarrow \{0, 1, \dots, 3k\} \\ b_{2i+1} \rightarrow f^b(b_{2i+1}) + 2k \text{ für } i=0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1 \\ b_{2i} \rightarrow f^b(b_{2i}) \text{ für } i=0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1 \\ c_i \rightarrow f^c(c_i) + k \text{ für } i=0, 1, \dots, k-1. \end{cases}$$

$f$  ist offensichtlich injektiv. Für die von  $f$  induzierte Abbildung

$$g: \begin{cases} K \rightarrow \{1, 2, \dots, 3k\} \\ \{x, y\} \rightarrow |f(x) - f(y)| \text{ für alle } \{x, y\} \in K \end{cases}$$

gilt offenbar:

$$g(K^b) = \{1, 2, \dots, k\} \tag{1}$$

$$g(K^c) = \{2k+1, 2k+2, \dots, 3k\}. \tag{2}$$

Um noch zu zeigen, dass  $g(K \setminus (K^b \cup K^c)) = \{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ , setzen wir

$$\delta(b_i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$$

und erhalten somit  $f(b_i) = 2k \cdot \delta(b_i) + f^b(b_i)$  für  $i=0, 1, \dots, k-1$ .

Dann folgt

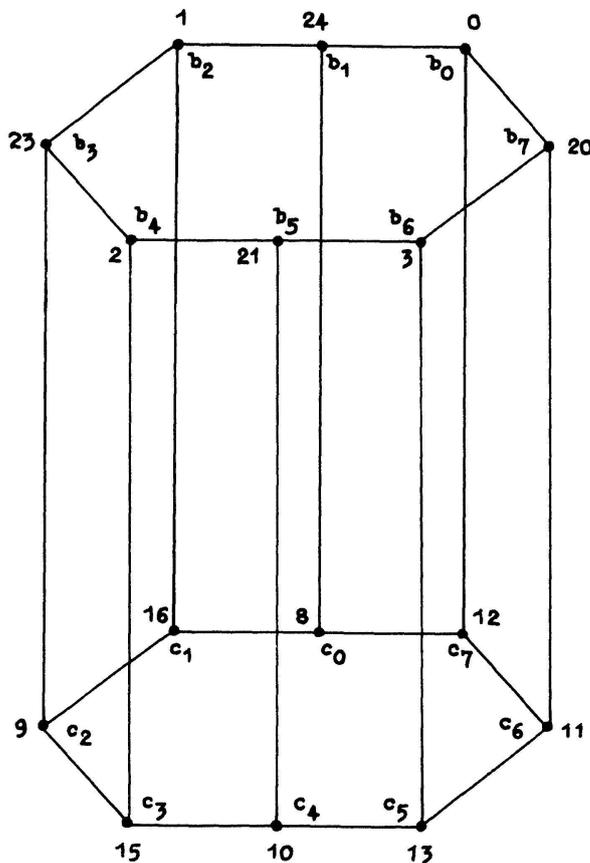
$$\begin{aligned} g(\{b_i, c_{i-1}\}) &= |f(b_i) - f(c_{i-1})| \\ &= |2k \cdot \delta(b_i) + f^b(b_i) - k - f^c(c_{i-1})| \\ &= k + |f^b(b_i) - f^b(b_{i-1})| \end{aligned}$$

für  $i=1, 2, \dots, k-1$  und

$$\begin{aligned} g(\{b_0, c_{k-1}\}) &= |f(b_0) - f(c_{k-1})| \\ &= |f^b(b_0) - k - f^b(b_{k-1})| \\ &= k + |f^b(b_0) - f^b(b_{k-1})|. \end{aligned}$$

Da  $f^b$  eine graziöse Numerierung von  $C_k^b$  liefert, hat man damit  $g(K \setminus (K^b \cup K^c)) = \{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ . Hieraus und aus (1) und (2) ergibt sich die Surjektivität von  $g$ . Also ist  $g$  bijektiv und  $P_k$  daher graziös.

Die Figur 6 zeigt das  $P_8$ .



Figur 6

Abschliessend sei noch kurz darauf hingewiesen, dass die in Satz 1 und Satz 2 bestimmten Teilklassen zu einer umfassenderen Klasse graziöser Graphen gehören. Es gilt nämlich allgemein, dass jeder beliebige Kreis  $C_k = (E, K)$  der Länge  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$  mit  $E = \{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\}$  und  $K = \{\{e_i, e_{i+1}\} \mid i = 0, 1, \dots, k-2\} \cup \{e_0, e_{k-1}\}$ , zu dem man eine beliebige Kante  $\{e_\nu, e_\mu\}$  mit  $e_\nu, e_\mu \in E$  adjungiert, zu einem graziösen Graphen wird. Der Beweis dieser Aussage würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

H. Bodendiek, H. Schumacher und H. Wegner, Duisburg

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 R. BODENDIEK, H. SCHUMACHER, H. WEGNER, *Über graziöse Graphen*. Math. Phys. Semesterberichte 1977, Heft 1, pp. 103–126.
- 2 S.W. GOLOMB, *How to Number a Graph*, in *Graph Theory and Computing* (R.C. Read, ed.), pp. 23–37 (Academic Press, New York and London 1972).
- 3 F. HARARY, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1969.
- 4 J. SEDLÁČEK, *Einführung in die Graphentheorie*, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) und Zürich 1968.
- 5 K. WAGNER, *Graphentheorie*, Bibliographisches Institut (Mannheim 1970).