

Résolution vectorielle de l'équation fonctionnelle des applications équiprojectives de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (champ de vitesse d'un solide)

Autor(en): **Archinard, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32152>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Résolution vectorielle de l'équation fonctionnelle des applications équiprojectives de $\mathfrak{R}^3$ dans $\mathfrak{R}^3$ (champ des vitesses d'un solide)

Introduction

On considère l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathfrak{R}^3$ auquel on associe un espace affine $\mathfrak{A}^3$ et dans lequel on note $\cdot$ le produit scalaire et $\times$ le produit vectoriel. On sait que le champ des vitesses d'un solide, à un instant donné, est une application V de $\mathfrak{A}^3$ (ou d'une partie de $\mathfrak{A}^3$) dans $\mathfrak{R}^3$ qui satisfait la relation (formule d'Euler):

$$V(P) = V(M) + \omega \times \overrightarrow{MP},$$

où ω est un vecteur indépendant des points M et P du solide, appelé vecteur instantané de rotation.

Ce résultat bien connu est démontré, dans de nombreux traités de mécanique, par la méthode des déplacements élémentaires ou par celle du trièdre mobile et en utilisant la notion de vitesse relative et d'entraînement [2, 6, 8, 9, 11], mais il est plus simple et plus élégant de le déduire de la remarque et du théorème suivants:

Remarque: Le champ des vitesses d'un solide, à un instant donné, est un champ équiprojectif, c'est-à-dire:

$$(V(M) - V(P)) \cdot \overrightarrow{MP} = 0$$

quels que soient les points M et P du solide. (Ceci découle du fait que la distance de deux points du solide est constante.)

Théorème. Si l'application V de $\mathfrak{A}^3$ dans $\mathfrak{R}^3$ est équiprojective, il existe un vecteur unique A tel que:

$$V(P) = V(M) + A \times \overrightarrow{MP}$$

quels que soient les points P et M .

Ce théorème est démontré dans la littérature par l'intermédiaire du calcul matriciel [1, 4], par des arguments géométriques ou de la théorie des torseurs [3, 5, 7], ou par le calcul vectoriel, mais en utilisant entre autres, l'hypothèse supplémentaire $(V(P) - V(M)) \cdot \overrightarrow{MQ} + (V(Q) - V(M)) \cdot \overrightarrow{MP} = 0$, obtenue par dérivation par rapport au temps de $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \text{cte}$ [10, 12].

On propose ici une démonstration de ce théorème faisant appel uniquement au calcul vectoriel (propriétés élémentaires et résolution des équations $A \times X = 0$ et $A \times B \cdot X = 0$) et n'utilisant pas l'hypothèse supplémentaire faite par [10] et [12].

Démonstration élémentaire

Pour alléger l'écriture, on considère une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et non pas de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, de sorte que le théorème s'énonce:

Théorème. *Si F est une application équiprojective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire satisfaisant*

$$(F(X) - F(Y)) \cdot (X - Y) = 0, \quad (1)$$

quels que soient les vecteurs X et Y , alors, il existe un vecteur A unique tel que:

$$F(X) = F(0) + A \times X \quad (2)$$

quel que soit X .

On remarque que la proposition inverse est trivialement vérifiée.

Démonstration: On considère trois vecteurs X , Y et Z , tels que $X \cdot Y \times Z$ ne soit pas nul. D'après (1), on a $(F(X) - F(0)) \cdot X = 0$, donc il existe un vecteur $B(X)$ tel que

$$F(X) - F(0) = B(X) \times X. \quad (3)$$

De même, il existe un vecteur $B(Y)$ tel que $F(Y) - F(0) = B(Y) \times Y$ et la condition (1) devient: $(B(X) \times X - B(Y) \times Y) \cdot (X - Y) = 0$, soit $(B(X) - B(Y)) \cdot X \times Y = 0$. $X \times Y$ n'étant pas nul, d'après la condition $X \cdot Y \times Z \neq 0$, on déduit de cette relation (de coplanarité)

$$B(X) = B(Y) + a(X, Y)X + \beta(X, Y)Y,$$

où $a(X, Y)$ et $\beta(X, Y)$ sont deux scalaires.

En remplaçant, dans (3), $B(X)$ par cette valeur, il vient

$$F(X) = F(0) + (B(Y) + \beta(X, Y)Y) \times X. \quad (4)$$

On écrit $F(Z)$ d'après (4) et on en soustrait $F(X)$

$$F(Z) - F(X) = B(Y) \times (Z - X) + \beta(Z, Y)Y \times Z - \beta(X, Y)Y \times X.$$

La condition (1) implique:

$$\begin{aligned} &(\beta(Z, Y)Y \times Z - \beta(X, Y)Y \times X) \cdot (Z - X) = 0, \text{ soit} \\ &(\beta(Z, Y) - \beta(X, Y))X \times Y \cdot Z = 0. \end{aligned}$$

$X \times Y \cdot Z$ n'étant pas nul, il vient $\beta(Z, Y) = \beta(X, Y)$ et, en posant $A(Y, Z) = B(Y) + \beta(Z, Y)Y$, (4) s'écrit:

$$F(X) = F(0) + A(Y, Z) \times X. \quad (5)$$

On a ainsi obtenu le résultat suivant: (Y, Z) étant un couple de vecteurs satisfaisant $Y \times Z \neq 0$, il existe un vecteur $A(Y, Z)$ tel que l'expression (5) donne $F(X)$, quel que soit X pour lequel $X \cdot Y \times Z$ n'est pas nul. De plus, $A(Y, Z)$ est unique, étant solution du système d'équations compatibles obtenues en prenant l'expression (5) pour deux vecteurs fixés X et X' non parallèles.

On va montrer que $A(Y, Z)$ est constant.

En effet, soit (Y_1, Z_1) avec $Y_1 \times Z_1 \neq 0$ et soit $A = A(Y_1, Z_1)$.

(Y, Z) étant un couple satisfaisant $Y \times Z \neq 0$, on peut trouver deux vecteurs X_1 et X_2 vérifiant les conditions $X_1 \times X_2 \neq 0$, $X_i \cdot Y_1 \times Z_1 \neq 0$ et $X_i \cdot Y \times Z \neq 0$, $i = 1, 2$. (On peut trouver deux vecteurs non parallèles et n'appartenant pas à deux plans donnés.)

On a alors, d'après (5):

$$\begin{aligned} F(X_i) &= F(0) + A \times X_i \\ F(X_i) &= F(0) + A(Y, Z) \times X_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Par soustraction, il vient:

$$(A - A(Y, Z)) \times X_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

D'où, puisque $X_1 \times X_2$ n'est pas nul,

$$A(Y, Z) = A. \quad (6)$$

La démonstration est alors achevée, car la formule (2) est évidemment vérifiée pour $X=0$, et si X n'est pas nul, on peut trouver un couple (Y, Z) de vecteurs tels que $X \cdot Y \times Z$ ne soit pas nul et la formule (2) découle alors de (5) et (6).

G. Archinard, Genève

BIBLIOGRAPHIE

- 1 P. Brousse: Mécanique. Collection U, Armand Collin, Paris 1968.
- 2 G. Bruhat: Cours de physique générale. Mécanique. 6^e éd., revue et complétée par A. Foch. Masson & Cie., Paris 1961.
- 3 A. Chatelet et J. Kampe de Fériet: Calcul vectoriel. Gauthier-Villars, Paris 1923.
- 4 H.C. Corben et Philip Stehle: Classical Mechanics. 2^e éd. John Wiley and sons, New York, London 1960.
- 5 E. Delassus: Leçons sur la dynamique des systèmes matériels. Hermann & Fils, Paris 1913.
- 6 G. Hamel: Theoretische Mechanik. Berichtiger Nachdruck. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1967.
- 7 H. Hennequin: Calcul vectoriel et mécanique. Cours de la Sorbonne, CDU, Paris 1955.
- 8 T. Levi-Civita et U. Amaldi: Meccanica razionale. Vol. I. N. Zanichelli, Bologna 1930.
- 9 S.W. MacCuskey: Introduction to Advanced Dynamics. Addison-Wesley, Reading, Mass., USA, 1959.
- 10 R. Marcolongo: Theoretische Mechanik. Erster Band, autorisierte deutsche Bearbeitung von H.E. Timerding. B.G. Teubner, Leipzig und Berlin 1911.
- 11 E. Meissner et H. Ziegler: Mechanik. Birkhäuser, Basel 1947.
- 12 E.A. Milne: Vectorial Mechanics. Methuen and Co., London 1948.