

Über eine spezielle Klasse von Dreiecken mit ganzzahligen Seiten

Autor(en): **Knup, Emil**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **33 (1978)**

Heft 6

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32949>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

winkligen Dreiecken D im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Natürlich gibt es auch Dreiecke mit konstruierbarem K ; z.B. lässt sich, wenn einer der Winkel α, β, γ gleich 135° ist, die Konstruktion des Falles (A) auch noch anwenden und führt auf denselben Kreis wie nach dem Verfahren aus (B). Ferner wird $f(x)$ beispielsweise für $a=b$ (gleichschenklige D) reduzibel, nämlich teilbar durch $x+c$. Wir erwähnen insbesondere als ein pointiertes Gegenstück zu Satz 6:

Satz 7. *Ist ABC gleichschenkelig und bei C rechtwinklig, so teilt der Mittelpunkt Z des optimalen Kreises die Höhe CY im Verhältnis $CZ:ZY=(1/2)(1+\sqrt{5})$ des «Goldenen Schnittes».*

In der Tat rechnet man nach, dass für den Kreis mit diesem Mittelpunkt Z und dem Radius $CY \cdot \sqrt{\sqrt{5}-2}$ die Bedingung (H) erfüllt ist (Abb. 6).

Ludwig Stammler, Halle (Saale), DDR

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L. Stammler und B. Weissbach: Halbierungssätze zur Gestaltabweichung ebener Figuren. Beitr. Alg. Geom. 8, im Druck.
- 2 L. Stammler und U. Matte: Stetigkeitsaussagen zur Diskussion des Schnittverhaltens einer Ovalenschar mit einem Oval. Beitr. Alg. Geom. 9, im Druck.
- 3 A. Rosenfeld: Aufgabe E2632. Lösung von J.Oman. Am. Math. Monthly 85, 280 (1978).

Über eine spezielle Klasse von Dreiecken mit ganzzahligen Seiten

Von der Schule her kennt man das Dreieck mit den Seiten 4, 5, 6, in welchem überraschenderweise ein Winkel genau doppelt so gross ist wie ein anderer. Die Frage liegt nahe, ob vielleicht noch weitere solche Dreiecke mit ganzzahligen, teilerfremden Seiten a, b, c und der Winkelbeziehung $\beta=2\alpha$ existieren. Im nachfolgenden Abschnitt a werden unter alleiniger Verwendung des Sinussatzes alle derartigen Dreiecke bestimmt.

Es erhebt sich die nächste Frage: Gibt es auch Dreiecke mit ganzzahligen, teilerfremden a, b, c und $\beta=3\alpha$? Im Abschnitt b wird auch für diese Dreiecke die entsprechende Parameterdarstellung hergeleitet.

Die gleiche Fragestellung für die Fälle $\beta=4\alpha, 5\alpha, \dots, k\alpha$ wird im letzten Abschnitt c weiterverfolgt; die Formeln (5) geben die allgemeine Lösung des aufgeworfenen Problems.

Einen andern Weg zur Lösung der vorliegenden Aufgabe hat J.T. Groenman, Groningen (NL) eingeschlagen; anstelle des Sinussatzes verwendet er weitgehend elementargeometrische Überlegungen. Seine Lösung erscheint in «Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde».

a) $\beta=2\alpha$. Der Sinussatz ergibt für die Seitenverhältnisse:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 4 \cos^2 \alpha - 1.$$

$$\frac{b}{a} = \text{rational} \Rightarrow 2 \cos a = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ teilerfremd aus } \mathbf{N}).$$

Mit diesem Ansatz wird $c/a = (m^2 - n^2)/n^2$, dazu $b/a = mn/n^2$, somit

$$a = n^2, \quad b = mn, \quad c = m^2 - n^2 \tag{1}$$

$$a + \beta < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < a < 60^\circ, \quad 1/2 < \cos a = m/2n < 1 \text{ oder } n < m < 2n.$$

$n = 2, 3, 4, \dots$ ist frei wählbar. m muss zwischen n und $2n$ liegen und zu n teilerfremd sein. Es gibt unendlich viele Dreiecke der gewünschten Art (siehe Liste im nächsten Abschnitt).

b) $\beta = 3a$. Die gleiche Methode wie oben führt auch hier zum Ziel: Man benützt zweimal den Sinussatz, drückt beide Quotienten durch $\cos a$ aus und verwendet wiederum den Ansatz $2 \cos a = m/n$.

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 3a}{\sin a} = 4 \cos^2 a - 1 = \frac{m^2 - n^2}{n^2} = \frac{n(m^2 - n^2)}{n^3},$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin 4a}{\sin a} = \frac{2 \sin 2a \cos 2a}{\sin a} = 2 \cos a (4 \cos^2 a - 2) = \frac{m}{n} \cdot \frac{m^2 - 2n^2}{n^2},$$

somit

$$a = n^3, \quad b = n(m^2 - n^2), \quad c = m(m^2 - 2n^2) \tag{2}$$

$$a + \beta < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < a < 45^\circ, \quad \sqrt{2}/2 < \cos a = m/2n < 1 \text{ oder } n\sqrt{2} < m < 2n.$$

$n = 2, 3, 4, \dots$ Damit a und c teilerfremd werden, sind für m nur die zu n teilerfremden Werte zu wählen. Es gibt wieder unendlich viele Dreiecke dieser Art.

Dreiecke mit $\beta = 2a$ bis $n = 5$

n	m	a	b	c
2	3	4	6	5
3	4	9	12	7
3	5	9	15	16
4	5	16	20	9
4	7	16	28	33
5	6	25	30	11
5	7	25	35	24
5	8	25	40	39
5	9	25	45	56

Dreiecke mit $\beta = 3a$ bis $n = 6$

n	m	a	b	c
2	3	8	10	3
3	5	27	48	35
4	7	64	132	119
5	8	125	195	112
5	9	125	280	279
6	11	216	510	539

c) $\beta = 4a, 5a, \dots, ka$. Drückt man $\sin ka / \sin a$ für weitere Werte von k durch $\cos a$ aus, so stösst man auf die Zahlen des Pascaldreiecks. Mit der Abkürzung $x = 2 \cos a$ erhält man nämlich

k	$\frac{\sin k a}{\sin a} = f_k(x)$
1	1
2	x
3	$x^2 - 1$
4	$x^3 - 2x$
5	$x^4 - 3x^2 + 1$
6	$x^5 - 4x^3 + 3x$
7	$x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$
8	$x^7 - 6x^5 + 10x^3 - 4x$

Man vermutet die allgemeine Formel

$$\frac{\sin k a}{\sin a} = f_k(x) = \binom{k-1}{0} x^{k-1} - \binom{k-2}{1} x^{k-3} + \binom{k-3}{2} x^{k-5} - \binom{k-4}{3} x^{k-7} + \dots \quad (3)$$

Der Induktionsbeweis stützt sich auf die Identität

$$\sin(k+1)a + \sin(k-1)a = 2 \sin k a \cos a.$$

Die Division durch $\sin a$ ergibt

$$\frac{\sin(k+1)a}{\sin a} = x \cdot \frac{\sin k a}{\sin a} - \frac{\sin(k-1)a}{\sin a}.$$

Für die $f_k(x)$ gilt somit die Rekursionsformel

$$f_{k+1} = x \cdot f_k - f_{k-1}, \quad (4)$$

und dieser Anforderung genügt in der Tat die vermutete Beziehung (3):

$$\begin{aligned} x \cdot f_k &= \binom{k-1}{0} x^k - \binom{k-2}{1} x^{k-2} + \binom{k-3}{2} x^{k-4} - \binom{k-4}{3} x^{k-6} + \dots \\ -f_{k-1} &= -\binom{k-2}{0} x^{k-2} + \binom{k-3}{1} x^{k-4} - \binom{k-4}{2} x^{k-6} + \dots \\ \hline x \cdot f_k - f_{k-1} &= \binom{k-0}{0} x^k - \binom{k-1}{1} x^{k-2} + \binom{k-2}{2} x^{k-4} - \binom{k-3}{3} x^{k-6} + \dots \\ &= f_{k+1}. \end{aligned}$$

Setzt man nun wieder wie früher $2 \cos a = x = m/n$ (m, n teilerfremd aus \mathbf{N}), so erhält man die Seiten a_k, b_k, c_k der Dreiecke mit $\beta = k a$:

$$\begin{aligned}
 a_k &= n^k \\
 b_k &= n \left[\binom{k-1}{0} m^{k-1} - \binom{k-2}{1} m^{k-3} n^2 + \binom{k-3}{2} m^{k-5} n^4 - + \dots \right] \\
 c_k &= \binom{k}{0} m^k - \binom{k-1}{1} m^{k-2} n^2 + \binom{k-2}{2} m^{k-4} n^4 - + \dots \tag{5}
 \end{aligned}$$

Offensichtlich sind a_k und c_k teilerfremd; es liegen somit Grundtripel vor. Dass für x nur rationale Werte in Frage kommen, geht aus dem Kosinussatz hervor:

$$x = 2 \cos a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \quad (a, b, c \text{ aus } \mathbf{N}).$$

Mit den Formeln (5) erhält man daher alle gesuchten Dreiecke.

$a + \beta < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < a < 180^\circ / k + 1 = a_k$, $\cos a_k < \cos a = m/2n < 1$ oder $2n \cos a_k < m < 2n$. Damit in diesem Intervall wenigstens ein ganzzahliges m existiert, muss $2n \cos a_k < 2n - 1$ sein oder $n > 1/2 (1 - \cos a_k)$.

Die beiden sicher teilerfremden Parameter n und $m = 2n - 1$ liefern dann eine brauchbare Lösung. Auch bei sehr grossen k und daher sehr kleinen a_k gibt es beliebig viele passende Paare n, m . Es gibt somit unendlich viele Dreiecke mit ganzzahligen Seiten und $\beta = k a$ für jedes k aus \mathbf{N} .

Formeln für $k = 4$ und 5:

$ \begin{aligned} \beta &= 4a \\ a &= n^4 \\ b &= mn(m^2 - 2n^2) \\ c &= m^4 - 3m^2n^2 + n^4 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \beta &= 5a \\ a &= n^5 \\ b &= n(m^4 - 3m^2n^2 + n^4) \\ c &= m(m^2 - n^2)(m^2 - 3n^2) \end{aligned} $
---	--

Dreiecke mit $\beta = 4a$

n	m	a	b	c
3	5	81	105	31
4	7	256	476	305
5	9	625	1395	1111

Dreiecke mit $\beta = 5a$

n	m	a	b	c
4	7	1024	1220	231
5	9	3125	5555	3024
6	11	7776	17214	12155